

Идеалы (примеры)

Задача 1. Найдите все идеалы и выясните, какие из них являются простыми/максимальными/главными в следующих кольцах.

- a) $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.
- b) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
- c) $F[[x]]$, где F — поле.
- d) \mathbb{Z}_p , где p — простое число.
- e*) \mathbb{Z}_l .
- f*) \mathbb{Q}_l .

Задача 2. Приведите пример простого, но не максимального идеала в следующих кольцах. Найдите соответствующие факторкольца.

- a) $\mathbb{Z}[x]$.
- b) $\mathbb{C}[x, y]$.
- c) $\mathbb{Z}_p[[x]]$.

Определение 1. Пусть $C([0, 1])$ — кольцо непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$.

Задача 3. Для $x \in [0, 1]$ пусть $I_x \subset C([0, 1])$ — идеал функций, обращающихся в ноль в точке x .

- a) Найдите $C([0, 1])/I_x$.
- b) Для $x \neq y$ найдите $I_x + I_y$, $I_x I_y$ и соответствующие факторкольца.
- c) Докажите, что $I_x^2 = I_x$.
- d*) Докажите, что I_x нельзя породить конечным набором функций.
- e*) Докажите, что всякий максимальный идеал совпадает с I_x для некоторого x .

Определение 2. Пусть $C^\infty([0, 1])$ — кольцо гладких (дифференцируемых любое число раз) функций на отрезке $[0, 1]$.

Задача 4. Для $x \in [0, 1]$ пусть $I_x \subset C^\infty([0, 1])$ — идеал функций, обращающихся в ноль в точке x .

- a) Найдите $C^\infty([0, 1])/I_x$.
- b) Для $x \neq y$ найдите $I_x + I_y$, $I_x I_y$ и соответствующие факторкольца.
- c) Найдите I_x/I_x^2 .
- d) Докажите, что I_x является главным.
- e*) Докажите, что всякий максимальный идеал совпадает с I_x для некоторого x .

Задача 5*. Докажите, что идеал (x^2, y) в $\mathbb{C}[x, y]$ не разлагается в произведение простых идеалов.

Задача 6. Пусть p и q — простые целые числа. Обозначим $\mathbb{Z}[\sqrt{p}]$ кольцо чисел вида $a + b\sqrt{p}$, где $a, b \in \mathbb{Z}$

- a) Сколько элементов в факторкольце $\mathbb{Z}[\sqrt{p}]/q\mathbb{Z}[\sqrt{p}]$?
- b*) Пусть $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{p}]$. Сколько элементов в факторкольце $\mathbb{Z}[\sqrt{p}]/z\mathbb{Z}[\sqrt{p}]$?
- c*) При каких q идеал $q\mathbb{Z}[\sqrt{p}]$ прост? Будет ли он при этом максимальным?