Модули

Задача 1. a) Докажите, что левый идеал $I \subset K$ максимален тогда и только тогда, когда левый K-модуль K/I прост.

b) Докажите, что всякий простой левый K-модуль изоморфен K/I, где $I \subset K$ – максимальный левый идеал.

c) Сформулируйте и докажите аналогичные утверждения для правых модулей.

Определение 1. Пусть K — кольцо. Для левого K-модуля M определим *двойственный модуль* $M^* = \mathrm{Hom}_K(M, K)$ с действием $(\phi x)(m) = \phi(m)x$, где $x \in K$, $\phi \in M^*$, $m \in M$. Аналогично для правого K-модуля M положим $M^* = \mathrm{Hom}_K(M, K)$ с действием $(x\phi)(m) = x\phi(m)$.

Задача 2. a) Докажите, что если M — левый модуль, то M^* — правый модуль, а если M — правый модуль, то M^* — левый модуль.

b) Пусть K содержит единицу. Обозначим K_l и K_r кольцо K, рассматриваемое как левый и правый модуль над собой. Докажите, что $K_l^* \cong K_r$ и $K_r^* \cong K_l$.

c) Постройте изоморфизм модулей $(M \oplus N)^* \cong M^* \oplus N^*$.

Задача 3. Пусть V — векторное пространство над полем F размерности n.

a) Докажите, что V^* — тоже векторное пространство размерности n.

b) Пусть $v_1, \ldots, v_n$ — базис V. Докажите, что в V^* можно выбрать базис $v^1, \ldots, v^n$, так что $v^i(v_i) = 1$, $v^i(v_j) = 0$ при $i \neq j$.

Задача 4. Найдите двойственные к следующим $\mathbb{Z}$-модулям:

a) $\mathbb{Z}$;

b) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$;

c) $\mathbb{Q}$.

Задача 5. Пусть $\mathrm{Mat}_n(K)$ — кольцо $n \times n$ матриц с элементами из кольца с единицей K.

a) Докажите, что векторы-столбцы с элементами из K образуют левый модуль над $\mathrm{Mat}_n(K)$, а векторы-строки — правый.

b) Докажите, что эти модули двойственны друг другу.

c) Для каких K эти модули простые?

Пусть $\iota : M \to M^{**}$ — естественное отображение, сопоставляющее $m \in M$ отображение модулей $\mu : M^* \to K$, такое что $\mu(\phi) = \phi(m)$, для $\phi \in M^*$.

Задача 6. a) Докажите, что ι является отображением модулей.

b) Приведите пример ненулевого модуля M над кольцом, такого что $\iota(M) = 0$.

c) Докажите, что если K — поле, и M конечнопорождён, то ι является изоморфизмом модулей.

d^*) Докажите, что если K — поле, то ι является вложением.

Задача 7. Пусть M и N — K-модули, такие что отображение ι задаёт изоморфизмы $N^{**} \cong N$ и $M^{**} \cong M$.

a) Докажите, что $\mathrm{Hom}_K(M, N) \cong \mathrm{Hom}_K(N^*, M^*)$ как абелевы группы.

b) Как устроен этот изоморфизм для конечномерных векторных пространств? Что происходит с матрицами?

Задача 8*. Приведите пример конечнопорождённого модуля над K, не представимого в виде прямой суммы модулей вида K/I (включая $K = K/0$), для

a^*) $K = Z[x]$;

b^*) $K = \mathbb{C}[x, y]$.