Косые многочлены

Пусть F — поле. Обозначим $\Lambda(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ кольцо *косых многочленов (skew polynomials)*, порождённое F и коммутирующими с F переменными ξ_i, такими что $\xi_i\xi_j = -\xi_j\xi_i$, в частности, $\xi_i^2 = 0$ (это следует добавить как дополнительные соотношения, если F имеет характеристику два).

Обозначим $\Lambda^k(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ подмножество однородных косых многочленов степени k.

Задача 1. a) Докажите, что если $x \in \Lambda^k(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $y \in \Lambda^l(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, то

$$xy = (-1)^{kl} yx \in \Lambda^{k+l}(\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

b) Найдите размерности $\Lambda(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $\Lambda^k(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ как векторных пространств над F.

c) Приведите пример не главного идеала в $\Lambda(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ при $n > 1$.

d^*) Докажите, что если характеристика F не равна 2, то однородный косой многочлен η степени два разложим на линейные множители тогда и только тогда, когда $\eta^2 = 0$.

Задача 2. a) Докажите, что косой многочлен является делителем нуля тогда и только тогда, когда его свободный член равен нулю.

b) Докажите, что косой многочлен *нильпотентен* (то есть найдётся k, такое что $\eta^k = 0$) тогда и только тогда, когда его свободный член равен нулю.

c) Докажите, что косой многочлен является обратимым тогда и только тогда, когда его свободный член не равен нулю.

Подсказка: Вспомните, как это делалось с рядами.

Пусть теперь $n \times n$ матрица A над F действует на $\Lambda(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ заменами переменных $\xi_i \to \sum_j a_{ij}\xi_j$. Ясно, что это действие сохраняет степень. Определим $\Lambda^k A$ как соответствующее линейное преобразование $\Lambda^k(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Задача 3. a) Докажите, что $\Lambda^n A$ является скаляром. Обозначим его $\det(A)$.

b) Запишите $\det(A)$ через элементы матрицы A.

c) Докажите, что $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Подсказка: Решить эту задачу прямым вычислением для матриц довольно сложно.

d) Докажите, что матрица A обратима тогда и только тогда, когда $\det(A) \neq 0$.

Задача 4. a) Запишите след $\Lambda^k A$ (сумму диагональных значений) через элементы матрицы A.

b) Выразите коэффициенты многочлена $\det(A - \lambda E)$ через эти следы.

Задача 5. a) Запишите $\Lambda^{n-1} A$ матрицей A^* в базисе одночленов.

b) Выразите элементы обратной матрицы A^{-1} через элементы A^*.

Подсказка: Воспользуйтесь тем, что умножение инвариантно относительно замены координат — это позволит решить задачу, не прибегая к вычислениям.

c^*) Как связаны матрицы $\Lambda^k A$ и $\Lambda^{n-k} A$ в базисе одночленов?

Задача 6*. Докажите, что *тождество Амицура-Левицкого*

$$\sum_{\sigma \in \Sigma_N} \mathrm{sign}(\sigma) A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \ldots A_{\sigma(N)} = 0,$$

где Σ_N — перестановки множества $\{1, \ldots, N\}$, $\mathrm{sign}(\sigma)$ — знак перестановки,

a^*) выполнено для любых N матриц $n \times n$ при $N > n^2$;

b^{**}) выполнено для любых N матриц $n \times n$ при $N \geqslant 2n$;

c^*) выполнено не для всех наборов матриц $n \times n$ при $N < 2n$.