Практикум

Задача 1. Найдите определитель и обратную матрицу к следующим матрицам.

a) $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & b_3 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{2n-1} & 0 & \dots & 0 & a_{2n-1} & 0 \\ b_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{2n} \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d^*) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-3} & x_2^{n-3} & \dots & x_{n-1}^{n-3} & x_n^{n-3} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$

Задача 2. Приведите следующие матрицы к Жордановой Нормальной Форме (над $\mathbb{C}$):

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ z & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$ d^*) $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$

Задача 3. Определим *результант* двух многочленов $f = a_nx^n + \dots + a_0$ и $g = b_mx^m + \dots + b_0$ над произвольным полем как определитель следующей матрицы размера $m+n$:

$$\operatorname{Res}(f,g) = \det \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & \dots & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & \dots & \dots & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & \dots & \dots & a_1 & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & b_1 & b_0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & \dots & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$$

a) Докажите, что $\operatorname{Res}(f,g)$ равен нулю тогда и только тогда, когда f и g имеют необратимый общий множитель.

Подсказка: проверьте, будут ли строки линейно зависимы.

b) Пусть теперь поле алгебраически замкнуто. Обозначим $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ корни f, $\beta_1, \dots, \beta_m$ — корни g. Докажите, что

$$\operatorname{Res}(f,g) = a_n^m \prod_{i=1}^{n} g(\alpha_i) = (-1)^{mn} b_m^n \prod_{i=1}^{m} f(\beta_j) = a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i - \beta_j).$$

Подсказка: а здесь уместнее преобразовывать столбцы.

c) Докажите, что наличие у многочлена f над алгебраически замкнутым полем кратных корней равносильно $\operatorname{Res}(f,f') = 0$.

d) Вычислите $\operatorname{Res}(f,f')$ для $f = ax^2 + bx + c$ и для $f = x^3 + px + q$.