Билинейная алгебра

Задача 1. a) Сколько существует билинейных симметрических форм на двумерном векторном пространстве над $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ с точностью до изометрии? Какие квадратичные формы им соответствуют?

b) Решите аналогичную задачу для трёхмерного векторного пространства над $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

c^*) Классифицируйте все неразложимые векторные пространства над $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ с билинейной симметрической формой с точностью до изометрии.

Задача 2. Рассмотрим на пространстве многочленов $\mathbb{R}[x]$ форму

$$(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx.$$

a) Докажите, что она является скалярным произведением (положительно определённой билинейной симметрической формой).

b) Найдите (x^n, x^m).

c) Докажите, что *многочлены Лежандра* $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, образуют ортогональный базис этого пространства.

d) Вычислите $(P_n(x), P_n(x))$.

e) Докажите, что $(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$.

f) Вычислите $P_n(1)$.

g^*) Докажите, что $\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$ разлагается в ряд по t как $\sum P_n(x)t^n$.

Задача 3. Зададим в пространстве многочленов форму правилом

$$(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)W(x)dx$$

для некоторой ненулевой непрерывной функции $W(x) \geqslant 0$. Назовём *ортогональными многочленами* ортогональный базис $\{P_n | n \in \mathbb{N}\}$, такой что $\deg P_n = n$.

a) Докажите, что такой базис существует и единственен с точностью до умножения P_n на константы.

b) Докажите, что P_n ортогонален любому многочлену степени меньше n.

c) Докажите, что найдутся последовательности вещественных чисел a_n, b_n, c_n, так что $P_{n+1} = (a_n x + b_n)P_n + c_n P_{n-1}$.

Подсказка: выберите a_n так, чтобы многочлен $P_{n+1} - a_n x P_n$ имел степень n, разложите его по базису ортогональных многочленов и докажите обнуление почти всех коэффициентов.

d) Пусть $P_n(x) = \alpha_n x^n + \beta_n x^{n-1} + \ldots$, положим $(P_n, P_n) = \gamma_n$. Выразите a_n, b_n и c_n через эти числа.

e^*) Докажите, что P_n имеет n вещественных корней, причём они лежат в интервале $(-1, 1)$.

Задача 4. a) Докажите, что найдутся такие многочлены $T_n(x)$ и $U_n(x)$, что $\cos(nt) = T_n(\cos(t))$, $\sin(nt) = \sin(t)U_{n-1}(\cos(t))$. Они называются *многочленами Чебышёва 1 и 2 рода* соответственно.

b) Докажите, что многочлены T_n ортогональны относительно определённого выше скалярного произведения с $W(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, а $U_n(x)$ — относительно скалярного произведения с $W(x) = \sqrt{1-x^2}$.

c) Напишите рекуррентную формулу для многочленов Чебышёва.

d^*) Выразите $\sum T_n(x)t^n$ и $\sum U_n(x)t^n$ элементарными функциями.

Задача 5. a) Пусть на векторном пространстве V над произвольным полем задана невырожденная билинейная симметрическая форма. Докажите, что для каждого оператора A существует и единственен *сопряжённый оператор* A^*, такой что $(Av, u) = (v, A^*u)$ для всех $u, v \in V$.

b) Выберем в пространстве V базис. Запишите матрицу A^* через матрицу A и матрицу Грама билинейной формы.

c) Что можно сказать о существовании и единственности сопряжённого оператора для вырожденной формы?

Определение 1. Оператор на векторном пространстве с невырожденной билинейной симметрической формой называется *самосопряжённым*, если для него выполнено $A^* = A$.

Задача 6. Пусть на вещественном конечномерном пространстве задано скалярное произведение (положительно определённая билинейная симметрическая форма).

a) Докажите, что у всякого самосопряжённого оператора найдётся *собственный вектор* v (такой ненулевой вектор, что $Av = \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{R}$).

Подсказка: воспользуйтесь тем, что у любого вещественного оператора есть двумерное инвариантное подпространство.

b) Докажите, что всякий самосопряжённый оператор можно привести к диагональному виду в ортонормированном базисе.

Подсказка: ортогональное дополнение к собственному вектору — инвариантное подпространство.

Задача 7. a) Пусть на пространстве с невырожденной билинейной симметрической формой $(\ ,\ )$ задана ещё одна билинейная симметрическая форма $\langle\ ,\ \rangle$. Докажите, что её можно записать в виде $\langle u, v\rangle = (Au, v)$ для некоторого самосопряжённого оператора A.

b) Классифицируйте с точностью до изометрии конечномерные вещественные векторные пространства со скалярным произведением и произвольной билинейной симметрической формой.

Подсказка: ответ известен как “приведение к главным осям”.

c^*) Классифицируйте с точностью до изометрии конечномерные комплексные векторные пространства с парой невырожденных билинейных симметрических форм.

d^{**}) Классифицируйте с точностью до изометрии конечномерные вещественные векторные пространства с парой невырожденных билинейных симметрических форм.

Определение 2. Пусть в векторном пространстве задана невырожденная билинейная симметрическая форма. Оператор называется *ортогональным*, если он действует изометрией, то есть $(Av, Au) = (v, u)$ для всех u и v.

Задача 8. a) Запишите условие ортогональности оператора через его матрицу и матрицу Грама.

b) Докажите, что всякий ортогональный оператор обратим. Чему может равняться его определитель?

c) Найдите все ортогональные операторы в двумерном вещественном пространстве со скалярным произведением.

d) Найдите все ортогональные операторы в двумерном вещественном пространстве с формой сигнатуры $(1, 1)$.

e^*) Докажите, что всякий ортогональный оператор с определителем 1 в трёхмерном вещественном пространстве со скалярным произведением является поворотом относительно некоторой оси.

f^*) Докажите, что если $A^* = -A$, то оператор $\exp(A)$ ортогонален.