Математический анализ: листок 0 (анонимный тест)

1. Знаете ли Вы, что такое (отвечайте да или нет):
   (1) доказательство по индукции?
   (2) предел числовой последовательности?
   (3) счетное множество?
   (4) мощность континуума?
   (5) дедекиндово сечение множества всех рациональных чисел?
   (6) комплексное число?
   (7) отношение на множестве?
   (8) отношение эквивалентности?
   (9) отношение частичного порядка?
   (10) цепная дробь?
   (11) вполне упорядоченное множество?
   (12) принцип трансфинитной индукции?

2. Укажите явно такое натуральное число $n > 1$, что $2^n > n^{1000}$.

3. Укажите такое натуральное число $n > 1$, что $1,0001^n > 1000000$.

4. Укажите такое натуральное число $n > 1$, что $1000^n < n!$.

5. Докажите, что $\sqrt[100]{2} < 1,01$.

6. Найдите 101 верный знак после запятой у числа $\sqrt{0,99\ldots 9}$ (сто девяток).

7. При каком натуральном k величина $\frac{k^2}{1,001^k}$ максимальна?

8. Что такое $\sqrt{2}$, и почему оно существует? (ответьте кратко — достаточно привести общую схему рассуждения, опустив детали).

9. Верны ли неравенства $(n/2)^n < n!$, $n! < n^n$ для всякого натурального $n > 1$?

10. Докажите, что функция $\sin(x^2)$ не является периодической.

11. Найдите предел последовательности
$$a_n = \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots \pm \frac{1}{n(n+1)}.$$

12. Существует ли предел $\lim_{n\to\infty} \sin n$?

13. Какие из следующих тождеств верны:
$$f(A\cup B) = f(A)\cup f(B), \quad f^{-1}(A\cup B) = f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B),$$
$$f(A\cap B) = f(A)\cap f(B), \quad f^{-1}(A\cap B) = f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B),$$
$$f(A-B) = f(A)-f(B), \quad f^{-1}(A-B) = f^{-1}(A)-f^{-1}(B)?$$
Здесь $A\cup B$, $A\cap B$ и $A-B$ обозначают теоретико-множественные объединение, пересечение и разность, соответственно.

14. Постройте явную биекцию (взаимно-однозначное соответствие) между интервалом $(0,1)$ и числовой прямой $\mathbb{R}$.

15. Существует ли сюръекция (отображение на) из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{Z}$ (множество всех целых чисел)?

Математический анализ: листок 1

Можно пользоваться известными со школы свойствами действительных чисел, относящимися к алгебраическим операциям и отношению порядка. Еще понадобятся следующие аксиомы:

Аксиома Архимеда: для всякого действительного числа $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число n, такое, что $n\varepsilon > 1$.

Принцип вложенных отрезков: пересечение любой последовательности вложенных отрезков непусто.

16. Докажите, что $(1+a)^n \geq 1 + na$ при $a > -1$ и $n = 1, 2, \ldots$.

Через $\mathbb{R}$ обозначим множество всех действительных чисел. Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным*, если существует действительное число M, такое, что $|a| \leq M$ для всех $a \in A$.

17. Ограниченны ли следующие множества: $\mathbb{N}$ (множество всех натуральных, то есть целых положительных, чисел), $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\{a^n/n! \mid n \in \mathbb{N}\}$ $(a \in \mathbb{R})$?

18. При каких α множество сумм

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}$$

(где n пробегает множество $\mathbb{N}$) ограниченно?

19. Будет ли ограниченным множество сумм

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

если из них вычеркнуть все дроби, в записи знаменателя которых есть хотя бы одна цифра 9?

20. У всякого непустого ограниченного множества $A \subset \mathbb{R}$ существует *точная верхняя грань*, то есть такое число $\sup A$, что $a \leq \sup A$ для всех $a \in A$, и $\sup A$ — наименьшее действительное число с таким свойством.

Назовем *ε-окрестностью* числа $a \in \mathbb{R}$ интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Будем говорить, что число $a \in \mathbb{R}$ является *пределом* последовательности a_1, a_2, $\ldots$, если для любого $\varepsilon > 0$, числа a_n принадлежат ε-окрестности числа a начиная с некоторого номера (зависящего от ε).

21. Всякая ограниченная неубывающая последовательность действительных чисел сходится.

22. У всякой ограниченной последовательности действительных чисел есть сходящаяся подпоследовательность.

Предельной точкой последовательности называется предел любой ее подпоследовательности.

23. Существует ли такая последовательность, для которой всякое действительное число является предельной точкой?

24. Существует ли такая последовательность, предельными точками которой являются все числа вида $1/n$, $n \in \mathbb{N}$, и только они?

Математический анализ: листок 2

Метрикой (или *функцией расстояния*) на множестве X называется функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$, такая, что $\rho(x,y) = \rho(y,x) \geq 0$ для всех $x \in X$, равенство $\rho(x,y) = 0$ достигается если и только если $x = y$, и выполено *неравенство треугольника*

$$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z).$$

Число $\rho(x,y)$ называется *расстоянием* между точками x и y.

25. Докажите, что на любом множестве X можно задать метрику, положив $\rho(x,y) = 1$ при $x \neq y$ и $\rho(x,y) = 0$ при $x = y$. Эта метрика называется *дискретной.*

26. Проверьте, что функция $\rho(x,y) = |x - y|$ является метрикой на множестве $\mathbb{R}$.

27. Пространство $\mathbb{R}^n$, по определению, состоит из упорядоченных наборов n действительных чисел. Проверьте, что функция

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

определяет метрику на $\mathbb{R}^n$. Здесь x_i обозначает i-ую координату точки $x \in \mathbb{R}^n$, аналогично для y.

28. Верно ли, что для любой метрики ρ, функция

$$\tilde{\rho}(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1 + \rho(x,y)}$$

снова является метрикой?

29. Рассмотрим следующую функцию на плоскости

$$\rho(x,y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|).$$

Докажите, что это метрика. Как выглядит в этой метрике окружность с центром в точке 0?

Рассмотрим последовательность точек x_n метрического пространства X. Последовательность x_n называется *сходящейся*, если существует *предел* x последовательности x_n, то есть точка со следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что $\rho(x_n, x) < \varepsilon$ при всех $n > N$.

30. Докажите, что последовательность точек метрического пространства не может иметь более одного предела.

31. Во всяком метрическом пространстве, состоящем более чем из одной точки, есть последовательность, которая никуда не сходится.

32. Докажите, что в пространстве с дискретной метрикой последовательность сходится тогда и только тогда, когда она стабилизируется (то есть становится постоянной начиная с некоторого номера).

Математический анализ: листок 3

Последовательность x_n точек метрического пространства X называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число N, что $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ при всех $n, m > N$.

33. Если фундаментальная последовательность имеет хотя бы одну предельную точку, то она сходится к этой точке. В частности, никакая фундаментальная последовательность не может иметь более одной предельной точки.

34. Всякая фундаментальная последовательность $x_n \in X$ *ограниченна*, т.е. существует такая константа $M > 0$, что $\rho(x_1, x_n) \leq M$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Метрическое пространство называется *полным*, если в нем сходится любая фундаментальная последовательность.

35. Докажите, что пространство $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, полно.

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. *Замкнутым шаром* с центром $a \in X$ и радиусом $R > 0$ называется множество всех точек $x \in X$, таких, что $\rho(x, a) \leq R$.

36. Опишите, как выглядят шары для такого метрического пространства: единичный замкнутый круг на плоскости с индуцированной метрикой.

37. * В метрическом пространстве шар большего радиуса может строго содержаться в шаре меньшего радиуса. Приведите пример.

Диаметром подмножества A метрического пространства X называется число $\sup\{\rho(a, b) \mid a, b \in A\}$. Подмножество A называется *замкнутым*, если для предел любой сходящейся последовательности $a_n \in A$ содержится в A.

38. Пусть A_n — последовательность непустых вложенных замкнутых множеств в полном метрическом пространстве, диаметры которых стремятся к нулю. Тогда пересечение $\bigcap A_n$ состоит ровно из одной точки. Вложенность означает, что $A_{n+1} \subseteq A_n$.

39. * Приведите пример полного метрического пространства и последовательности вложенных замкнутых шаров в этом пространстве, пересечение которой пусто.

40. Замкнутое подмножество полного метрического пространства является полным метрическим пространством.

Отображение $F : X \to X$ называется *сжимающим*, если существует число q, такое, что $0 < q < 1$, и для любых $x, y \in X$, выполнено неравенство

$$\rho(F(x), F(y)) \leq q\rho(x, y)$$

41. Приведите пример отображения $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ без неподвижных точек, такого, что $|F(x) - F(y)| < |x - y|$ для любых $x \neq y$.

42. Докажите, что если какая-то итерация $f^{\circ n}$ отображения f полного пространства X в себя является сжимающей, то f имеет неподвижную точку. Может ли при этих условиях отображение f иметь несколько неподвижных точек?

43. * Пусть $1 < \lambda \leq 3$ и $f(x) = \lambda x(1 - x)$. Докажите, что для всякой точки $x \in (0, 1)$, последовательность $f^{\circ n}(x)$ сходится к неподвижной точке отображения f.

Математический анализ: листок 4

Подмножество U метрического пространства X называется *открытым*, если для всякой точки $x \in U$ существует шар (положительного радиуса) с центром в точке x, целиком содержащийся в U.

44. Пустое множество и все пространство X открыты. Объединение любого (конечного или бесконечного) набора открытых множеств открыто. Пересечение конечного числа открытых множеств открыто. Докажите.

45. Пусть $U \subset X$ — открытое множество, $x \in U$, а последовательность $x_n \in X$ сходится к x. Тогда найдется такой номер N, что $x_n \in U$ для всех $n > N$.

46. Докажите, что подмножество метрического пространства является замкнутым тогда и только тогда, когда его дополнение открыто.

Пусть A — подмножество метрического пространства X. Ограничение функции расстояния в X на множество A задает на A метрику. Эта метрика называется *индуцированной метрикой*. Метрическое пространство A называется метрическим подпространством метрического пространства X.

47. Если подпространство $Z \subset X$ полно относительно индуцированной метрики, то Z замкнуто в X.

Подмножество A метрического пространства X называется *всюду плотным* в X, если любой шар в X положительного радиуса пересекается с A.

48. (a) Множество рациональных чисел всюду плотно во множестве действительных чисел. (b) Множество точек в $\mathbb{R}^n$, все координаты которых — рациональные числа, всюду плотно в $\mathbb{R}^n$.

49. * Пусть X полно. Докажите, что пересечение любой последовательности открытых всюду плотных множеств всюду плотно.

Метрическое пространство называется связным, если его нельзя представить в виде объединения двух замкнутых множеств, которые непусты и не пересекаются.

50. Подмножество метрического пространства связно в индуцированной метрике тогда и только тогда, когда его нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся множеств, каждое из которых не содержит точек, предельных для другого множества.

51. Отрезок $[0,1]$ связен.

52. Опишите все связные подмножества в $\mathbb{R}$.

53. Пусть S^1 — окружность единичного радиуса на плоскости с центром в точке o. Зафиксируем точку $a \in S^1$. Точку $x \in S^1$ включаем в множество X, если угол $\angle xoa$ несоизмерим с π (то есть не представляется в виде $r\pi$, где r — рациональное число); интервал (без концов), соединяющий o и y, включаем в X, если угол $\angle yoa$ соизмерим с π. Множество X называется *колесом Маркова*. Связно ли колесо Маркова?

54. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ связно и открыто. Тогда любые две точки в X можно соединить ломаной, целиком лежащей в X.

55. Пусть X — связное метрическое пространство. Тогда для любых x, $y \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется *ε-цепочка*, соединяющая x с y, то есть такая конечная последовательность точек $a_0 = x$, a_1, $\ldots$, a_{n-1}, $a_n = y$ в X, что $\rho(a_i, a_{i+1}) < \varepsilon$ для $i = 1, \ldots, n-1$.

Математический анализ: листок 5

Метрическое пространство X называется *вполне ограниченным*, если для любого $\varepsilon > 0$, в пространстве X найдется конечная *ε-сеть*, то есть конечное множество $A \subseteq X$, такое, что расстояние от любой точки пространства X до ближайшей точки из A меньше ε.

56. Всякое ограниченное подмножество в $\mathbb{R}^n$ вполне ограниченно.

57. Во вполне ограниченном метрическом пространстве, у всякой последовательности есть фундаментальная подпоследовательность. Наоборот, если у всякой последовательности есть фундаментальная подпоследовательность, то пространство вполне ограниченно.

Метрическое пространство X называется *компактным*, если оно полно и вполне ограниченно.

58. Подмножество в $\mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограниченно.

59. Метрическое пространство X компактно тогда и только тогда, когда у всякой последовательности из X есть сходящаяся подпоследовательность.

Множество $\mathcal{U}$ открытых подмножеств пространства X называется *покрытием* пространства X, если X содержится в объединении всех множеств из $\mathcal{U}$.

60. Метрическое пространство X компактно тогда и только тогда, когда у всякого покрытия пространства X открытыми подмножествами есть конечное подпокрытие.

61. * Рассмотрим пространство X последовательностей $x_n \in \mathbb{R}$, таких, что $|x_n| \le 2^{-n}$ для всех $n = 1, 2, \dots$. Расстоянием между двумя такими последовательностями называется число

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (x_n - y_n)^2}.$$

Докажите, что X является компактным метрическим пространством относительно этой функции расстояния.

62. В компактном пространстве любая вложенная последовательность замкнутых подмножеств имеет непустое пересечение.

63. Подмножество метрического пространства, компактное относительно индуцированной метрики, замкнуто.

64. * Пусть A и B — замкнутые подмножества в $\mathbb{R}^n$. Определим расстояние по Хаусдорфу между A и B как точную нижнюю грань всех чисел $\varepsilon > 0$ таких, что A содержится в ε-окрестности множества B, а B содержится в ε-окрестности множества A. Так определенная функция расстояния является метрикой на множестве всех замкнутых подмножеств в $\mathbb{R}^n$.

65. * Множество всех замкнутых подмножеств единичного квадрата в $\mathbb{R}^2$ компактно относительно метрики Хаусдорфа.

66. Пусть X — компактное метрическое пространство, а $F : X \to X$ — отображение, такое, что $\rho(F(x), F(y)) < \rho(x, y)$ для любой пары различных точек x, $y \in X$. Докажите, что F имеет единственную неподвижную точку.

Математический анализ: листок 6

Пусть X, Y — метрические пространства. *Окрестностью* точки $x_0 \in X$ называется любое подмножество в X, содержащее некоторый шар положительного радиуса вокруг точки x_0. Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если прообраз любой окрестности точки $f(x_0)$ при отображении f содержит окрестность точки x_0. Отображение f называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке пространства X. *Функцией* на X мы будем называть отображение из X в $\mathbb{R}$.

67. Приведите пример функции, разрывной в каждой точке.

68. Пусть $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ — отображения метрических пространств. Если f непрерывно в точке x_0, а g непрерывно в точке $f(x_0)$, то композиция $g \circ f$ непрерывна в точке x_0. В частности, композиция двух непрерывных отображений непрерывна.

69. Приведите пример функции на отрезке $[-1, 1]$, непрерывной в точке 0 и разрывной во всех остальных точках.

70. Приведите пример функции на прямой, непрерывной во всех иррациональных точках и разрывной во всех рациональных точках.

71. Существует ли функция на прямой, непрерывная во всех рациональных точках и разрывная во всех иррациональных точках?

72. * Найдите все непрерывные функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такие, что $f(x + y) = f(x) + f(y)$ для всех x, $y \in \mathbb{R}$. Существуют ли разрывные функции с таким свойством?

73. * Существует ли непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такая что $f(f(x)) = -x$ для всех $x \in \mathbb{R}$? Существуют ли разрывные функции с таким свойством?

74. Предположим, что любая непрерывная функция на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ достигает своего наибольшего значения. Докажите, что X компактно.

75. Предположим, что $f(X)$ связно для любой непрерывной функции на метрическом пространстве X. Докажите, что X связно.

76. Приведите пример разрывной функции $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ограничение которой на каждую прямую в $\mathbb{R}^2$ непрерывно.

77. Существует ли функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, разрывная в каждой точке плоскости и такая, что функция $g_x(y) = f(x, y)$ непрерывна как функция от y при каждом фиксированном значении x, а функция $h_y(x) = f(x, y)$ непрерывна как функция от x при каждом фиксированном значении y?

Непрерывное, обратимое отображение метрических пространств, обратное к которому тоже непрерывно, называется *гомеоморфизмом.*

78. Существует ли гомеоморфизм между: (1) интервалом и прямой, (2) интервалом и полуинтервалом, (3) прямой и плоскостью, (4) прямой и открытым лучом, (5) окружностью и двумерной сферой?

Математический анализ: листок 7

Пусть X и Y — метрические пространства. Последовательность отображений $f_n : X \to Y$ *равномерно сходится* к отображению $f : X \to Y$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер, начиная с которого $\rho_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ вне зависимости от $x \in X$.

79. Докажите, что если последовательность непрерывных отображений сходится равномерно, то предел этой последовательности тоже является непрерывным отображением.

80. Канторово множество K гомеоморфно пространству $K \times K$.

81. Существует такое непрерывное отображение $h : [0,1] \to [0,1]$, которое является неубывающим, то есть из $x \leq y$ следует $h(x) \leq h(y)$, и которое постоянно на каждом интервале, не пересекающем канторово множество. Такое отображение называется *канторовой лестницей* (devil's staircase).

82. * Существует непрерывное отображение отрезка на весь квадрат (*кривая Пеано*).

83. Для каждого натурального n существует многочлен $T_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такой, что $T_n(\cos x) = \cos nx$. Многочлены T_n называются *многочленами Чебышева.* Посчитайте T_1, T_2, T_3.

84. Найдите коэффициент при x^n у многочлена $T_n(x)$.

85. Проверьте, что $T_n \circ T_m = T_{mn}$.

86. Если $x \in [-1,1]$, то $T_2^{\circ m}(x) \in [-1,1]$ для всех m. Если же $x \notin [-1,1]$, то $T_2^{\circ m}(x) \to \infty$ при $m \to \infty$, то есть для всякого $M > 0$ имеем $|T_2^{\circ m}(x)| > M$ для всех достаточно больших m.

87. * Среди всех многочленов степени n со старшим коэффициентом 1, многочлен $f_n(x) = T_n(x)/c_n$ меньше всего уклонается от нуля на отрезке $[-1,1]$, то есть расстояние от f_n до нуля в $C([-1,1], \mathbb{R})$ самое маленькое. Здесь c_n — старший коэффициент многочлена T_n.

Математический анализ: листок 8

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — некоторая функция. *Разделенные разности* функции f определяются следующим образом:
$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}, \quad f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_2, x_3]}{x_1 - x_3},$$
$$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_2, x_3, x_4]}{x_1 - x_4},$$
и т.д. *Интерполяционным многочленом Лагранжа* с узлами интерполяции $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ называется многочлен L степени не выше n, такой, что $L(x_i) = f(x_i)$ для всех $i = 0, \dots, n$.

88. Найдите интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $\sin$ с узлами интерполяции 0, $\pi/2$, π, 2π, 3π.

89. Докажите, что
$$f[x_0, \dots, x_n] = L[x_0, \dots, x_n] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)}.$$

90. Докажите формулу Ньютона для интерполяционного многочлена L:
$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0, \dots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j).$$
Здесь $f[x_0]$ — это просто значение функции f в точке x_0.

91. Докажите формулу для остаточного члена
$$f(x) - L(x) = f[x, x_0, \dots, x_n] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

92. Пусть узлы интерполяции $x_0, \dots, x_n$ — это в точности все корни многочлена T. Тогда
$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \frac{T(x)}{T'(x_i)(x - x_i)}.$$

Пусть $h > 0$. Определим оператор конечной разности Δ_h, действующий на функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, и сопоставляющий каждой такой функции новую функцию $\Delta_h f$, определенную формулой
$$\Delta_h f(x) = f(x + h) - f(x).$$
Применяя этот оператор несколько раз, получаем функции $\Delta_h^2 f$, $\Delta_h^3 f$ и т.д.

93. Найдите такие действительные числа $a_0, \dots, a_n$, что
$$\Delta_h^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k f(x + kh)$$
для любой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

94. Предположим, что $x_k = x_0 + kh$ для всех $k = 1, \dots, n$. Проверьте, что
$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{\Delta_h^n f(x_0)}{n! h^n}.$$

Математический анализ: листок 9

95. Пусть $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ — функция, дифференцируемая в нуле и такая, что $f(0) = 0$. Следует ли отсюда, что графики функций $f_n(x) = nf(x/n)$, $n = 1, 2, \dots$, сходятся в метрике Хаусдорфа?

96. Пусть $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ — функция, дважды дифференцируемая в нуле и такая, что $f(0) = f'(0) = 0$. Следует ли отсюда, что графики функций $f_n(x) = n^2 f(x/n)$, $n = 1, 2, \dots$, сходятся в метрике Хаусдорфа?

97. Приведите пример функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, всюду непрерывной, но нигде не дифференцируемой.

98. Докажите, что множество нигде не дифференцируемых функций на отрезке $[a, b]$ имеет непустое пересечение с любым открытым подмножеством пространства $C([a, b], \mathbb{R})$.

99. Пусть фунция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируема всюду $(n + 1)$ раз. Докажите, что существует предел

$$\lim_{(x_0,x_1,\dots,x_n)\to(x_0,x_0,\dots,x_0)} f[x_0, x_1, \dots, x_n].$$

100. Приведите пример функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, производная которой существует всюду, но не является непрерывной функцией.

101. Существует ли дифференцируемая всюду функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, производная которой разрывна в каждой точке?

102. Докажите, что производная дифференцируемой всюду функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ принимает все промежуточные значения, то есть если $f'(a) = A$, $f'(b) = B$, то для любого действительного числа C между A и B найдется число c между a и b, такое, что $f'(c) = C$.

103. Пусть F_n — число Фибоначчи с номером n:

$$F_0 = 1,\ F_1 = 1,\ F_2 = 2,\ F_3 = 3,\ F_4 = 5,\ F_5 = 8,\ F_6 = 13,\ \dots$$

Найдите множество чисел $x \in \mathbb{R}$, для которых сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n.$$

Найдите формулу для суммы этого ряда. *Указание:* начните со второй части.

104. Пусть $T_n(x)$ — многочлен Чебышева с номером n. Для каждого $x \in \mathbb{R}$, найдите множество действительных чисел $t \in \mathbb{R}$, для которых сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) t^n.$$

Найдите формулу для суммы этого ряда.

105. Найдите разложение функции $e^{\sin x}$ по степеням x с точностью до членов порядка 5 и выше.

106. При каких $x \in \mathbb{R}$ сходится гипергеометрический ряд

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} x^n,$$

в котором α, β и γ — положительные действительные числа?

Математический анализ: листок 10

107. Пусть $[a, b]$ — произвольный отрезок, содержащийся в $(0, \infty)$. Докажите, что функцию $\log x$ можно сколь угодно точно равномерно приблизить многочленами на отрезке $[a, b]$.

108. Докажите, что ограничение функции $|x|$ на отрезок $[-1, 1]$ можно сколь угодно точно приблизить многочленами. *Указание:* рассмотрите последовательность функций

$$f_1(x) = \log(1 + e^x) + \log(1 + e^{-x}), \quad f_n(x) = \frac{f_1(nx)}{n}.$$

109. Докажите, что все производные функции $e^{-1/x}$, ограниченной на $(0, \infty)$, стремятся к нулю при $x \to 0$.

110. Существует ли бесконечно дифференцируемая функция $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такая, что $\eta(x) = 0$ при всех $x < 0$, и $\eta(x) > 0$ при всех $x > 0$?

111. Докажите, что для любых $a, b, A, B \in \mathbb{R}$, таких что $a < b$, найдется бесконечно дифференцируемая функция $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такая, что $\phi(x) = A$ при всех $x \in (-\infty, a]$, $\phi(x) = B$ при всех $x \in [b, \infty)$, и все значения функции ϕ на отрезке $[a, b]$ лежат между A и B. *Указание:* рассмотрите функцию $\eta(\eta(1) - \eta(1 - x))$.

112. Существуют ли бесконечно дифференцируемые функции $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такие, что множество точек (x, y) на плоскости, заданное параметрическим уравнением $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, совпадает с графиком функции $y = |x|$?

113. Докажите *формулу Симпсона*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) - \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\zeta).$$

Здесь $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — произвольная функция, дифференцируемая 4 раза, а ζ — некоторая точка на отрезке $[a, b]$ (зависящая от f, a и b).