ЛЕКЦИЯ 2

В этой лекции мы построим вероятностную меру Пикрела на пространстве бесконечных матриц $\mathrm{Mat}\,(\infty\times\infty,\mathbb{C})$. Для этого мы сначала зададим семейство вероятностных мер $\mu^{(s)}_{m,n}$ на пространствах конечных матриц $\mathrm{Mat}\,(m\times n,\mathbb{C})$ и проверим их согласованность [1] . Тогда из теоремы Колмогорова о существовании процесса будет следовать, что семейство $\mu^{(s)}_{m,n}$ задает $\mu^{(s)}$ вероятностную меру на $\mathrm{Mat}\,(\infty\times\infty,\mathbb{C})$. Более того меры $\mu^{(s)}_{m,n}$ будут инвариантны [2] относительно действия $U(m)\times U(n)$ группы конечных унитарных матриц на $\mathrm{Mat}\,(m\times n,\mathbb{C})$ умножением слева на матрицу $U(m)$ и справа на матрицу $U(n)$, а значит конечная мера будет инвариантна относительно действия $U(\infty)\times U(\infty)$ группы бесконечных унитарных матриц на $\mathrm{Mat}\,(\infty\times\infty,\mathbb{C})$ [3] .

Пусть элемент объема в пространстве $\mathrm{Mat}\,(m\times n,\mathbb{C})$ задается следующей формулой

$$dZ := \prod_{i,j} d(\mathrm{Re}Z_{ij})d(\mathrm{Im}Z_{ij})$$

Определим семейство мер

$$\widetilde{\mu}^{(s)}_{m,n} = \det\left(1+\mathrm{Z}^*\mathrm{Z}\right)^{-m-n-s}\mathrm{dZ}$$

Здесь и далее мы считаем, что $s>-1$

Утверждение.

Меры $\widetilde{\mu}^{(s)}_{m,n}$ инвариантны относительно описанного выше действия $U(m)\times U(n)$ группы конечных унитарных матриц на $\mathrm{Mat}\,(m\times n,\mathbb{C})$.

Доказательство.

Сначала убедимся, что это действие сохраняет dZ. Действие $U(m)\times U(n)$ на Z, можно представить, как композицию действия $U(m)$ умножением на столбцы матрицы Z и действия $U^T(n)$ умножением на строки матрицы Z. Но элемент объема dZ можно расписать через произведение элементов объема от строк или столбцов матрицы Z:

$$dZ = \prod_{c\in\{\text{столбцы } Z\}} d\left(\mathrm{Re}(c)\right)d\left(\mathrm{Im}(c)\right) = \prod_{r\in\{\text{строки } Z\}} d\left(\mathrm{Re}(r)\right)d\left(\mathrm{Im}(r)\right)$$

Поэтому нам достаточно доказать, что унитарный оператор $U=X+iY$ сохраняет элемент объема $dadb$ для комплексного вектора $a+ib$.

Мы знаем, что элемент объема в $\mathbb{R}^n$ при действии линейного оператора умножается на модуль его определителя. Таким образом нам осталось доказать, что модуль определителя унитарного оператора U, рассматриваемого как действительный оператор, действующий на действительный вектор $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ равен единице.

Найдем матрицу оператора U, как действительного оператора. Имеем

$$Uv = (X+iY)(a+ib) = (Xa-Yb)+i\left(Ya+Xb\right)$$

откуда искомая матрица имеет следующий вид:

$$M = \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix}$$

Покажем, что модуль определителя этой матрицы равен единице. Запишем условие унитарности оператора U:

---

[1] Ниже мы формально определим, что под этим подразумеваем

[2] Мера ν инвариантна относительна действия G на X, если для $\forall g\in G$ и любого борелевского $A\subseteq X$ имеем $\nu\left(T_gA\right)=\nu\left(A\right)$

[3] Действительно пространство $U(\infty)\times U(\infty)$ состоит из конечных унитарных матриц дополненных бесконечной единичной матрицей, а значит действие элемента $U(\infty)\times U(\infty)$ на $\mathrm{Mat}\,(\infty\times\infty,\mathbb{C})$ меняет только некоторый конечномерный уголок бесконечной матрицы. Поэтому для инвариатности меры $\mu^{(s)}$ достаточно инвариантности конечномерных мер $\mu^{(s)}_{m,n}$.

$$E = UU^* = (X+iY)(X^T - iY^T) = \underbrace{\left(XX^T + YY^T\right)}_{=E} + i\underbrace{\left(YX^T - XY^T\right)}_{=0}$$

поэтому

$$MM^T = \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^T & Y^T \\ -Y^T & X^T \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} XX^T + YY^T & -YX^T + XY^T \\ YX^T - XY^T & XX^T + YY^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

Таким образом $\det MM^T = 1$, а значит $|\det M| = 1$, что и требовалось.

Теперь докажем по определению инвариантность меры $\widetilde{\mu}^{(s)}_{m,n}$. Пусть X борелевское подмножество $\mathrm{Mat}\,(m \times n, \mathbb{C})$, тогда

$$\widetilde{\mu}^{(s)}_{m,n}\left(T_{(U(m),U(n))}\,(X)\right) = \int_{U(m)XU(n)} \det\left(1 + Z^* Z\right)^{-m-n-s} dZ =$$
$$= \int_X \det\left(1 + U(m)^* Z^* U(n)^* U(n) Z U(m)^*\right)^{-m-n-s} dZ =$$
$$= \int_X \det\left(U(m)\left(1 + Z^* Z\right) U(m)^*\right)^{-m-n-s} dZ =$$
$$= \int_X \det\left(1 + Z^* Z\right)^{-m-n-s} dZ = \widetilde{\mu}^{(s)}_{m,n}\,(X)$$

Утверждение доказано.

Пусть $\pi^{m+1,n}_{m,n} : \mathrm{Mat}\,((m+1) \times n) \to \mathrm{Mat}\,(m \times n)$ это отображение, которое забывает последнюю строчку матрицы. Тогда $\left(\pi^{m+1,n}_{m,n}\right)_* \widetilde{\mu}^{(s)}_{m+1,n}$ это мера в пространстве $\mathrm{Mat}\,(m \times n)$, которая борелевскому подмножеству $\mathrm{Mat}\,(m \times n)$ ставит в соответствие меру $\widetilde{\mu}^{(s)}_{m,n}$ его полного прообраза при отображении $\pi^{m+1,n}_{m,n}$. Аналогично, пусть $\pi^{m,n+1}_{m,n}$ забывает последний столбец матрицы.

Определение. Будем говорить, что семейство мер $\mu^{(s)}_{m,n}$ согласованно, если

$$\left(\pi^{m+1,n}_{m,n}\right)_* \mu^{(s)}_{m+1,n} = \mu^{(s)}_{m,n}$$
$$\left(\pi^{m,n+1}_{m,n}\right)_* \mu^{(s)}_{m,n+1} = \mu^{(s)}_{m,n}$$

Меры $\widetilde{\mu}^{(s)}_{m,n}$ пока не являются вероятностными (мера всего пространства не равна 1) и не согласованы. Следующее предложение позволит нам, умножая каждую $\widetilde{\mu}^{(s)}_{m,n}$ на некоторую константу, добиться этих требований. Мы будем доказывать его только для отображения $\pi^{m+1,n}_{m,n}$, рассмотрение $\pi^{m,n+1}_{m,n}$ аналогично.

Предложение.

$$\left(\pi^{m+1,n}_{m,n}\right)_* \widetilde{\mu}^{(s)}_{m+1,n} = const^{(s)}_{m,n} \cdot \widetilde{\mu}^{(s)}_{m,n}$$

$$const^{(s)}_{m,n} = \frac{\pi^n \Gamma(m+1+s)}{\Gamma(n+m+1+s)}$$

Замечание.

Перед тем, как приступить к доказательству этого предложения, поясним несколько неформально, зачем для теоремы Колмогорова нужна согласованность. Чтобы построить меру на пространстве $\mathrm{Mat}\,(\infty \times \infty, \mathbb{C})$, мы сначала задаем ее на цилиндрических множествах, а потом как это обычно делается продолжаем ее с цилиндрических множеств на порожденную ими σ - алгебру. В нашем случае цилиндрическими множествами будут множества вида $\mathrm{A_N} = \{\mathrm{Z} : \mathrm{Z}_{ij} \in \mathrm{A}_{ij}, i, j \leq \mathrm{N}\}$, где $\{\mathrm{A}_{ij}\}$ - некоторый фиксированный набор борелевских множества в $\mathbb{C}$. Чтобы узнать меру цилиндрического множеств $\mathrm{A_N}$ мы можем отобразить его из $\mathrm{Mat}\,(\infty \times \infty, \mathbb{C})$ в $\mathrm{Mat}\,(m \times n, \mathbb{C})$, вырезая уголок бесконечной матрицы размера $m \times n$ (где $m, n \geq N$), а затем в пространстве $\mathrm{Mat}\,(m \times n, \mathbb{C})$ воспользоваться мерой $\mu^{(s)}_{m,n}$. Так как выбор $m, n \geq \mathrm{N}$ неоднозначен, то для корректности описанной выше процедуры нам и нужна согласованность мер.

Доказательство.

Пусть X борелевское подмножество $\mathrm{Mat}\,(m\times n,\mathbb{C})$, $m\leq n$, тогда

$$\left(\pi^{m+1,n}_{m,n}\right)_*\widetilde{\mu}^{(s)}_{m+1,n}(X)=\int_X\left(\int_{\mathbb{C}^n}\det\left(1+\begin{pmatrix} Z\\ \overrightarrow{\xi}\end{pmatrix}^*\begin{pmatrix} Z\\ \overrightarrow{\xi}\end{pmatrix}\right)^{-(m+1)-n-s}d\overrightarrow{\xi}\right)dZ$$

Где $\begin{pmatrix} Z\\ \overrightarrow{\xi}\end{pmatrix}$ матрица рамера $(m+1)\times n$ получаемая преписыванием строки $\overrightarrow{\xi}$ к матрице Z.

Наиболее простой простой вид, к которому можно привести матрицу Z при действии $U(m)\times U(n)$ следующий

$$U(m)ZU(n)=\begin{pmatrix} u_1 & \dots & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & u_m & \dots & 0\end{pmatrix}=D$$

Здесь $u_1,\dots,u_n$ это сингулярные числа Z, квадраты которых являются собственными числами матрицы Z^*Z [4] .

Имеем

$$\begin{pmatrix} Z\\ \overrightarrow{\xi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} U^{-1}(m)DU^{-1}(n)\\ \overrightarrow{\xi}U(n)U^{-1}(n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} U^{-1}(m)D\\ \overrightarrow{\xi}U(n)\end{pmatrix}U^{-1}(n)$$

Подставив в интеграл, получим

$$\int_X\left(\int_{\mathbb{C}^n}\det\left(1+\begin{pmatrix} U^{-1}(m)D\\ \overrightarrow{\xi}U(n)\end{pmatrix}^*\begin{pmatrix} U^{-1}(m)D\\ \overrightarrow{\xi}U(n)\end{pmatrix}\right)^{-(m+1)-n-s}d\overrightarrow{\xi}\right)dZ$$

В интеграле по $\overrightarrow{\xi}$ сделаем замену переменных $\overrightarrow{\widehat{\xi}}=\overrightarrow{\xi}U(n)$, как было показано выше $d\overrightarrow{\widehat{\xi}}=d\overrightarrow{\xi}$, так что имеем

$$\int_X\left(\int_{\mathbb{C}^n}\det\left(1+\begin{pmatrix} U^{-1}(m)D\\ \overrightarrow{\widehat{\xi}}\end{pmatrix}^*\begin{pmatrix} U^{-1}(m)D\\ \overrightarrow{\widehat{\xi}}\end{pmatrix}\right)^{-(m+1)-n-s}d\overrightarrow{\widehat{\xi}}\right)dZ$$

Умножение D на $U^{-1}(m)$ не влияет на определитель, поэтому имеем

$$\int_X\left(\int_{\mathbb{C}^n}\det\left(1+\begin{pmatrix} u_1 & \dots & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & u_m & \dots & 0\\ \overline{\widehat{\xi}_1} & \overline{\widehat{\xi}_2} & \dots & \dots & \overline{\widehat{\xi}_n}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} u_1 & \dots & 0 & \widehat{\xi}_1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \widehat{\xi}_2\\ 0 & \dots & u_m & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & \vdots\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & \widehat{\xi}_n\end{pmatrix}\right)^{-(m+1)-n-s}d\overrightarrow{\widehat{\xi}}\right)dZ=$$

$$=\int_X\left(\int_{\mathbb{C}^n}\det\left(\begin{pmatrix} 1+u_1^2 & \dots & 0 & u_1\widehat{\xi}_1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \dots & 1+u_m^2 & u_m\widehat{\xi}_m\\ u_1\overline{\widehat{\xi}_1} & \dots & u_m\overline{\widehat{\xi}_m} & 1+\overrightarrow{\widehat{\xi}}^*\overrightarrow{\widehat{\xi}}\end{pmatrix}\right)^{-(m+1)-n-s}d\overrightarrow{\widehat{\xi}}\right)dZ=$$

[4]Для доказательство этого выберем в унитарном пространстве $\mathbb{C}^m$ ортонормированный базис $\{e_1,\dots,e_m\}$, состоящий из собственных векторов оператора Z^*Z с собственными значениями $\{\lambda_1\geq\dots\geq\lambda_m\}$. Пусть $\lambda_i\neq 0$ при $i\leq r$, тогда вектора $\{\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}Ze_1,\dots,\frac{1}{\sqrt{\lambda_r}}Ze_r\}$ будут ортонормированными в $\mathbb{C}^n$:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}Ze_i,\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}Ze_j\right)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}(Z^*Ze_i,e_j)=\sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_j}}(e_i,e_j)$$

Дополним их до ортонормированного базиса в $\mathbb{C}^n$. В паре построенных базисов матрица оператора Z будем иметь вид D, матрицы перехода к этим базисам будут унитарными.

$$\left(\text{если } \det A_{11} \neq 0, \text{ то } \det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \det A_{11} \det\left(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)\right)^5$$

$$= \int_X \left(\int_{\mathbb{C}^n} \det(1+Z^*Z)^{-(m+1)-n-s} \times \left(1 + \sum_{i=1}^n |\widehat{\xi}_i|^2 - \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{|\widehat{\xi}_i|^2 u_i^2}{1+u_i^2}}_{\text{считаем } u_i=0, \text{ при } i>m} \right)^{-(m+1)-n-s} d\overrightarrow{\widehat{\xi}} \right) dZ =$$

$$= \int_X \left(\int_{\mathbb{C}^n} \det(1+Z^*Z)^{-(m+1)-n-s} \times \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{|\widehat{\xi}_i|^2}{1+u_i^2} \right)^{-(m+1)-n-s} d\overrightarrow{\widehat{\xi}} \right) dZ =$$

$$\left(\text{сделаем замену } \widetilde{\xi}_i = \frac{\widehat{\xi}_i}{\sqrt{1+u_i^2}}, d\overrightarrow{\widetilde{\xi}} = \frac{d\overrightarrow{\widehat{\xi}}}{\prod_i \sqrt{1+u_i^2}} = \frac{d\overrightarrow{\widehat{\xi}}}{\det(1+Z^*Z)} \right)$$

$$= \int_X \left(\int_{\mathbb{C}^n} \det(1+Z^*Z)^{-m-n-s} \times \left(1 + \sum_{i=1}^n |\widetilde{\xi}_i|^2 \right)^{-(m+1)-n-s} d\overrightarrow{\widetilde{\xi}} \right) dZ =$$

$$= \widetilde{\mu}_{m,n}^{(s)}(X) \times \underbrace{\left(\int_{\mathbb{C}^n} \left(1 + \sum_{i=1}^n |\widetilde{\xi}_i|^2 \right)^{-(m+1)-n-s} d\overrightarrow{\widetilde{\xi}} \right)}_{const_{m,n}^{(s)}}$$

Осталось вычислить $const_{m,n}^{(s)}$, для этого перейдем к интегрирований по поверхности $2n$-ых действительных сфер ($\mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n}$). Учтя то, что площадь N-ой сферы радиуса ρ равна $\frac{\pi^(N/2)}{\Gamma(N/2)}\rho^{N-1}$ получаем

$$\begin{aligned} const_{m,n}^{(s)} &= \int_0^\infty (1+\rho^2)^{-(m+1)-n-s} \rho^{2n-1} \frac{\pi^n}{\Gamma(n)} d\rho = \\ &= \frac{\pi^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty (1+r)^{-(m+1)-n-s} r^{n-1} dr = \\ &= \frac{\pi^n}{\Gamma(n)} B(n, m+s+1) = \frac{\pi^n \Gamma(m+1+s)}{\Gamma(n+m+1+s)} \end{aligned}$$

Здесь $r = \rho^2 = \sum_{i=1}^n |\widetilde{\xi}_i|^2$, $\Gamma(p)$ это гамма-функция, а $B(p,q)$ это бета-функция Эйлера [6]:

$$\Gamma(p) = 2\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2l-1} dt$$

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+t}} dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{1}$$

Следствие.

$$\widetilde{\mu}_{m,n}^{(s)}\left(\operatorname{Mat}(m \times n, \mathbb{C})\right) = \pi^{mn} \Pi_{l=1}^m \frac{\Gamma(l+s)}{\Gamma(n+l+s)}$$

---

[5] Действительно, вычтем из второй строки первую домноженную на $-A_{21}A_{11}^{-1}$

[6] Заметим, что

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2p-1}(\theta) sin^{2q-1}(\theta) d\theta$$

Тогда формула (1) следует из следующего равенства

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty cos^{2p-1}(\theta) sin^{2q-1}(\theta) e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} dr d\theta = \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2p-1} dx \int_0^\infty e^{-y^2} x^{2q-1} dy$$

Это следствие дает нам возможность отнормировать меры $\widetilde{\mu}^{(s)}_{m,n}$

Определение.

$$\mu^{(s)}_{m,n} := \frac{\widetilde{\mu}^{(s)}_{m,n}}{\widetilde{\mu}^{(s)}_{m,n}\left(\operatorname{Mat}\left(m\times n,\mathbb{C}\right)\right)} = \pi^{-mn}\Pi_{l=1}^{m}\frac{\Gamma(n+l+s)}{\Gamma(l+s)}\det\left(1+Z^*Z\right)^{-m-n-s}dZ$$

Меры $\mu^{(s)}_{m,n}$ являются вероятностными, более того они согласованы

$$\left(\pi^{m+1,n}_{m,n}\right)_*\mu^{(s)}_{m+1,n} = \mu^{(s)}_{m,n}$$

$$\left(\pi^{m,n+1}_{m,n}\right)_*\mu^{(s)}_{m,n+1} = \mu^{(s)}_{m,n}$$

Поэтому по теореме Колмогорова о существовании процесса, эти меры задают на $\operatorname{Mat}\left(\infty\times\infty,\mathbb{C}\right)$ меру, которая называется мерой Пикрела.