# Комплексные многообразия,

**лекция 4**

Миша Вербицкий

**НМУ/НОЦ, Москва**

**11 октября 2010**

## Связности и кручение

**ЗАМЕЧАНИЕ: Пространство сечений расслоения $B$ на гладком многообразии обозначается $B$.**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Связность** на векторном расслоении $B$ есть отображение $B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1 M \otimes B$ удовлетворяющее $\nabla(fb) = df \otimes b + f\nabla b$ для любых $b \in B$, $f \in C^\infty M$.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Если $X \in TM$ – векторное поле, $b \in B$, то **$\nabla_X b$ – сечение $B$, полученное как $\langle \nabla b, X \rangle$.**

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Для любого тензорного расслоения $\mathcal{B}_1 := B^* \otimes B^* \otimes ... \otimes B^* \otimes B \otimes B \otimes ... \otimes B$ **связность на $B$ определяет связность на $\mathcal{B}_1$** по **формуле Лейбница:**

$$\nabla(b_1 \otimes b_2) = \nabla(b_1) \otimes b_2 + b_1 \otimes \nabla(b_2).$$

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Связности образуют **аффинное пространство** над пространством сечений расслоения $\mathrm{End}(B) \otimes \Lambda^1 M$.

## Кручение

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть $\nabla$ – связность на $\Lambda^1 M$,

$$\Lambda^1 \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M$$

**Кручение** $\nabla$ задается формулой $T_\nabla := \mathrm{Alt} \circ \nabla - d$, где

$$\mathrm{Alt}: \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M \longrightarrow \Lambda^2 M$$

- внешнее умножение. Кручение есть отображение $T_\nabla : \Lambda^1 M \longrightarrow \Lambda^2 M$.

**ЗАМЕЧАНИЕ:**

$$\begin{aligned} T_\nabla(f\eta) &= \mathrm{Alt}(f\nabla\eta + df \otimes \eta) - d(f\eta) \\ &= f\Big[\mathrm{Alt}(\nabla\eta) - d\eta\Big] + df \wedge \eta - df \wedge \eta = fT_\nabla(\eta). \end{aligned}$$

**Значит, $T_\nabla$ линейно.**

**ЗАМЕЧАНИЕ:**
**Кручение часто определяют как отображение $\Lambda^2 TM \longrightarrow TM$ формулой $\nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) - [X, Y]$. Это оператор, двойственный определенному выше.**

## Аффинные пространства

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** **Торсор** над группой $G$ есть пространство $X$, снабженное свободным и транзитивным действием $G$, $g, x \longrightarrow \rho(g,x)$.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** **Морфизм** торсоров $(X,G,\rho) \xrightarrow{\Psi} (X',G',\rho')$ есть пара $\Psi_X: X \longrightarrow X', \Psi_G: G \longrightarrow G'$, где $\Psi_G$ есть гомоморфизм групп, и согласованное с действием $G, G'$ на $X, X'$ так: $\Psi_X(\rho(g,x)) = \rho'(\Psi_G(g), \Psi_X(x))$

**ЗАМЕЧАНИЕ:** **Торсоры образуют категорию.**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** **Аффинное пространство** есть торсор над линейным пространством $V$, которое называется его **линеаризацией**.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** **Действие $V$ на $A$ обозначается $a, v \longrightarrow a + v$.**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** **Морфизм** аффинных пространств есть морфизм соответствующих торсоров.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Это то же самое, что отображение $A \xrightarrow{\Psi_A} A'$, плюс гомоморфизм линеаризаций $L \xrightarrow{\Psi_L} L'$ такой, что $\Psi_A(a+l) = \Psi_A(a) + \Psi_L(l)$.

## Линеаризация кручения

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Если $\nabla_1$ и $\nabla_2$ – связности на расслоении $B$, их разность есть сечение $\operatorname{End}(B)\otimes\Lambda^1 M$. **Пространство $\mathcal{A}(B)$ связностей на $B$ есть аффинное пространство**, то есть торсор над пространством сечений $\operatorname{End}(B)\otimes\Lambda^1 M$.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** **Кручение есть аффинное отображение**

$$\mathcal{A}(\Lambda^1 M) \longrightarrow \operatorname{Hom}(\Lambda^1 M, \Lambda^2 M) = TM \otimes \Lambda^2 M.$$

потому что $T(\nabla+\alpha) = T(\nabla)+\operatorname{Alt}_{12}(\alpha)$, где $\operatorname{Alt}_{12}:\ \Lambda^1 M\otimes\operatorname{End}(\Lambda^1 M) \longrightarrow \Lambda^2 M\otimes TM$ есть альтернирование по первым двум индексам.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** **Линеаризованное кручение** есть отображение $T_{lin} = \operatorname{Alt}$,

$$T_{lin}:\ \Lambda^1(M)\otimes\Lambda^1(M)\otimes TM \longrightarrow \Lambda^2 M\otimes TM$$

полученное как линеаризация кручения.

## Связность Леви-Чивита

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Связность на римановом многообразии $(M, g)$ называется **ортогональной**, если $\nabla(g) = 0$, и **связностью Леви-Чивита**, если она ортогональна и без кручения.

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** Пусть $B$ – расслоение с метрикой. **Тогда на $B$ всегда существует ортогональная связность.**

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:** Выберем покрытие $\{U_i\}$, в котором $B$ тривиально и допускает ортонормальный базис. На каждом $U_i$ выберем связность $\nabla_i$, которая сохраняет этот базис. Пусть $\psi_i$ – разбиение единицы, подчиненное $\{U_i\}$. Тогда **формула $\nabla(b) := \sum \nabla_i(\psi_i b)$ определяет ортогональную связность.** ■

**ТЕОРЕМА:** ("основная теорема дифференциальной геометрии") Каждое риманово многообразие **допускает связность Леви-Чивита, и она единственна.**

## Связность Леви-Чивита (существование и единственность)

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:** Выберем ортогональную связность $\nabla$ на $\Lambda^1 M$. Пространство ортогональных связностей – аффинное, и **его линеаризация есть $\Lambda^1 M \otimes \mathfrak{so}(TM)$.**

**Шаг 1:** Отождествляя $TM$ и $\Lambda^1 M$, получаем $\mathfrak{so}(TM) = \Lambda^2 M$.

**Шаг 2:** Линеаризованное кручение есть отображение

$$T_{lin}: \Lambda^1 M \otimes \mathfrak{so}(TM) = \Lambda^1(M) \otimes \Lambda^2 M \xrightarrow{\mathsf{Alt}} \Lambda^2 M \otimes \Lambda^1 M = \Lambda^2 M \otimes TM.$$

**Это изоморфизм.** Справа и слева расслоения одной размерности, так что **достаточно доказать, что $T_{lin}$ нет ядра.** Но если $\eta \in \ker T_{lin}$, $\eta$ **симметрична по первым двум аргументам и кососимметрична по последним,** что дает $\eta(x,y,z) = \eta(y,x,z) = -\eta(y,z,x)$. **То есть $\sigma(\eta) = -\eta$, где $\sigma$ есть циклическая перестановка аргументов.** Поскольку $\sigma^3 = 1$, из этого следует, что $\eta = 0$.

**Шаг 3:** Мы получили, что **ортогональная связность однозначно задается своим кручением,** ибо кручение задает изоморфизм аффинных пространств.

**Шаг 4:** Возьмем $\nabla := \nabla_0 - T_{lin}^{-1}(T_{\nabla_0})$. Тогда $T_\nabla = T_{\nabla_0} - T_{lin}(T_{lin}^{-1}(T_{\nabla_0})) = 0$, значит **$\nabla$ – связность без кручения**. ■

## Связность Леви-Чивита на кэлеровом многообразии

**ТЕОРЕМА:** Пусть $(M, I, g)$ – почти комплексное эрмитово многообразие. **Тогда следующие условия эквивалентны:**

(i) **Комплексная структура $I$ интегрируема, а эрмитова форма $\omega$ замкнута.**

(ii) $\nabla(I) = 0$, где $\nabla$ есть связность Леви-Чивита.

**ЗАМЕЧАНИЕ: Импликация (ii) $\Rightarrow$ (i) довольно очевидна.** Действительно, $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$, значит, коммутатор $(1,0)$-векторных полей – снова типа $(1,0)$, что влечет интегрируемость $I$. Также, **$\nabla$ – связность без кручения, что влечет $d\omega = \mathrm{Alt}(\nabla\omega)$,** значит, $d\omega = 0$.

## Связность Бисмута

**ЗАМЕЧАНИЕ:** На римановом многообразии, кручение $T_\nabla \in \Lambda^2 M \otimes TM$ удобно рассматривать как сечение $T'_\nabla \in \Lambda^2 M \otimes \Lambda^1 M$, отождествляя $TM$ и $\Lambda^1 M$ с помощью $g$.

Доказательство импликации (i) $\Rightarrow$ (ii). немедленно вытекает из теоремы Бисмута.

**ТЕОРЕМА:** (Бисмут) Пусть $(M, I, g)$ – комплексное эрмитово расслоение. **Тогда существует и единственна связность $\nabla_b$, сохраняющая $I$ и $g$, такая, что тензор кручения $T'_{\nabla_b} \in \Lambda^2 M \otimes \Lambda^1 M$ кососимметричен. В этой ситуации, $T'_{\nabla_b} = -I(d\omega)$.**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Такая связность называется **связностью Бисмута**.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Единственность связности Бисмута следует из того, что **ортогональная связность однозначно задается своим кручением.**

## Линеаризация кручения на эрмитовом многообразии

**Доказательство теоремы Бисмута. Шаг 1:** Выберем связность $\nabla$, сохраняющую $I$ и $g$. Разность $\alpha$ двух таких связностей есть 1-форма с коэффициентами в пространстве косоэрмитовых матриц, $\alpha \in \Lambda^1 \otimes \mathfrak{u}(TM)$. Значит, **пространство связностей, сохраняющих $I$ и $g$, есть аффинное пространство над пространством сечений $\Lambda^1 \otimes \mathfrak{u}(TM)$.**

**Шаг 2: $\mathfrak{u}(TM)$ отождествляется с $\Lambda^{1,1}M$.** Тогда линеаризация кручения есть отображение

$$T_{lin}: \Lambda^1(M) \otimes \Lambda^{1,1}(M) \xrightarrow{\mathsf{Alt}} \Lambda^2 M \otimes \Lambda^1(M).$$

**Шаг 3: $\nabla$ сохраняет разложение Ходжа, а $I$ интегрируема**, что дает $T_\nabla(X^{1,0}, Y^{1,0}) \subset T^{1,0}(M)$ для любых $X^{1,0}, Y^{1,0} \in T^{1,0}(M)$. Это следует из

$$T_\nabla(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

**Шаг 4:** Значит, $T'_\nabla$ принадлежит

$$\Lambda^{1,1}(M) \otimes \Lambda^1(M) \oplus \Lambda^{2,0} \otimes \Lambda^{0,1}(M) \oplus \Lambda^{0,2} \otimes \Lambda^{1,0}(M)$$

потому что **при подстановке туда двух $(1,0)$-векторов оно дает $(0,1)$-форму.**

## Линеаризация кручения на эрмитовом многообразии (2)

**Шаг 5:** Для $\alpha \in \Lambda^1 M \otimes \mathfrak{so}(TM)$, продолжим $\alpha$ на $\Lambda^* M$ по формуле Лейбница $\alpha(\eta \wedge \eta') = \alpha(\eta) \wedge \eta' + (-1)^{\deg \eta} \alpha(\eta')$. Запишем связность Леви-Чивита формулой $\nabla_{LC} = \nabla + \alpha$. **Тогда $\alpha = T_{lin}^{-1}(T'_\nabla)$.** Это дает

$$d\omega = \operatorname{Alt}(\nabla_{LC}\omega) = \operatorname{Alt}(\nabla\omega + \alpha\omega) = \operatorname{Alt}(T_{lin}^{-1}(T'_\nabla)(\omega)).$$

**Шаг 6:** Обозначим за $A: \ \Lambda^2 M \otimes \Lambda^1 M$ операцию, переводящую $\tau$ в $\operatorname{Alt}(T_{lin}^{-1}(\tau)(\omega))$. Поскольку $A(T'_\nabla) = d\omega$, $A(T'_\nabla)$ не зависит выбора связности $\nabla$, сохраняющей $I, g$. Значит, $T_{lin} \circ A = 0$, и **линеаризация кручения задает комплекс расслоений**

$$\begin{aligned} &\Lambda^1(M) \otimes \Lambda^{1,1}(M) \\ &\xrightarrow{T_{lin}} \Lambda^{1,1} M \otimes \Lambda^1(M) \oplus \Lambda^{2,0} \otimes \Lambda^{0,1}(M) \oplus \Lambda^{0,2} \otimes \Lambda^{1,0}(M) \qquad (*) \\ &\xrightarrow{A} \Lambda^{2,1}(M) \oplus \Lambda^{1,2}(M). \end{aligned}$$

**Шаг 7:** Пусть $\tau \in \Lambda^1 M \otimes \Lambda^2 M = \Lambda^1 M \otimes \mathfrak{so}(TM)$. Рассмотрим $\tau$ как отображение $V_\tau: \ \Lambda^1 M \longrightarrow \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M$ и продолжим до отображения $\Lambda^i M \longrightarrow \Lambda^1 M \otimes \Lambda^i M$ по формуле Лейбница, $V_\tau(\eta \wedge \eta') = V_\tau(\eta) \wedge \eta' + (-1)^{\deg \eta} V_\tau(\eta')$. **Тогда** $V_\tau(\omega)(\cdot,\cdot,\cdot) = \tau(\cdot,\cdot,I\cdot)$ (проверьте это).

## Линеаризация кручения на эрмитовом многообразии (3)

**Шаг 8:** Если $\tau$ – 3-форма, $\tau \in \Lambda^3 M \subset \Lambda^1 M \otimes \Lambda^2 M = \Lambda^1 M \otimes \mathfrak{so}(TM)$, то $T_{lin}(\tau) = \tau$, значит,

$$A(\tau) = \operatorname{Alt}(T_{lin}^{-1}(\tau)(\omega)) = \operatorname{Alt}(V_\tau(\omega)) = \operatorname{Alt}(\tau(\cdot,\cdot,I\cdot)).$$

**Это дает $A(\tau) = \mathcal{I}(\tau)$,** где $\mathcal{I}(\tau)(\cdot,\cdot,\cdot) = \tau(I\cdot,\cdot,\cdot) + \tau(\cdot,I\cdot,\cdot) + \tau(\cdot,\cdot,I\cdot)$. Поэтому **для кососимметричного тензора $\tau$ имеем $A(\tau) = \mathcal{I}(\tau)$.**

**Шаг 9:** Поскольку $A(T'_\nabla) = d(\omega)$ (шаг 6) для связности с кососимметричным кручением $\tau$, имеем $d(\omega) = \mathcal{I}(\tau)$ (шаг 8). С другой стороны **$d\omega$ лежит в $\Lambda^{2,1}(M) \oplus \Lambda^{1,2}(M)$ в силу интегрируемости, значит, $\mathcal{I}(d\omega) = I(d\omega)$. Это влечет $\tau = \mathcal{I}^{-1}(d\omega) = -Id\omega$. Мы доказали формулу для кручения в утверждении теоремы Бисмута.**

**Шаг 10:** Поскольку $\mathcal{I}: \ \Lambda^3(M) \longrightarrow \Lambda^3(M)$ изоморфизм, из предыдущего шага вытекает, что $A\Big|_{\Lambda^{2,1}(M)\oplus\Lambda^{1,2}(M)} \longrightarrow \Lambda^{2,1}(M)\oplus\Lambda^{1,2}(M)$ – изоморфизм. **Значит, правая стрелка комплекса (*) – наложение.**

## Линеаризация кручения на эрмитовом многообразии (4)

**Шаг 11:** Из вычисления размерностей, инъективности левой стрелки и сюрьективности правой вытекает, что **(*) - точная последовательность.**

$$\begin{aligned}&\Lambda^1(M)\otimes\Lambda^{1,1}(M)\\ &\quad\xrightarrow{T_{lin}}\Lambda^{1,1}M\otimes\Lambda^1(M)\oplus\Lambda^{2,0}\otimes\Lambda^{0,1}(M)\oplus\Lambda^{0,2}\otimes\Lambda^{1,0}(M) \qquad (*)\\ &\qquad\xrightarrow{A}\Lambda^{2,1}(M)\oplus\Lambda^{1,2}(M).\end{aligned}$$

**Шаг 12:** Пусть $\mathcal{A}(I,g)$ есть пространство связностей на $\Lambda^1 M$, сохраняющих $I$ и $g$. Поскольку $A(T'_\nabla)=d\omega$ (шаг 6), отображение $\nabla\longrightarrow T'_\nabla$ индуцирует морфизм аффинных пространств

$$\mathcal{A}(I,g)\xrightarrow{\mathcal{T}}A^{-1}(d\omega).$$

**Поскольку (*) – точная последовательность, $\mathcal{T}$ является изоморфизмом.**

**Шаг 13:** Как доказано на шаге 9, $A(-Id\omega)=d\omega$. Поскольку $\mathcal{T}$ есть изоморфизм, **существует и единственна связность $\mathcal{T}^{-1}(-Id\omega)$, кручение которой удовлетворяет $T'_\nabla=-Id\omega$.**