Комплексные многообразия,

лекция 9

Миша Вербицкий

НМУ/НОЦ, Москва

22 ноября 2010

Векторные расслоения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Векторное расслоение** на гладком многообразии есть локально тривиальный пучок $C^\infty M$-модулей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Тотальное пространство** $\operatorname{Tot} B$векторного расслоения есть пространство всех пар $x \in M, b \in B_x/\mathfrak{m}_x B$, где B_x означает пространство ростков B в x, а $\mathfrak{m}_x$ – максимальный идеал, снабженное естественной топологией и гладкой структурой. **Тотальное пространство расслоения гладко расслоено над M** со слоем $B_x/\mathfrak{m}_x B = \mathbb{R}^n$, где n есть ранк B. **Слой** векторного расслоения в точке x есть $B_x/\mathfrak{m}_x B$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Сечением** гладкого расслоения называется гладкое отображение $M \longrightarrow \operatorname{Tot} B$, переводящее $x \in M$ в точку $(x \in M, b \in B_x/\mathfrak{m}_x B)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Множество сечений гладкого расслоения **естественно отождествено с множеством сечений соответствующего пучка.**

Голоморфные расслоения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Голоморфное векторное расслоение** на гладком многообразии есть локально тривиальный пучок $\mathcal{O}_M$-модулей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Тотальное пространство** голоморфного расслоения есть пространство всех пар $x \in M, b \in B_x/\mathfrak{m}_x B$, где B_x означает пространство ростков B в x, а $\mathfrak{m}_x$ – максимальный идеал, снабженное естественной топологией и голоморфной структурой.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Множество голоморфных сечений голоморфного расслоения **естественно отождествено с множеством сечений соответствующего пучка.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть B – голоморфное расслоение. Рассмотрим пучок $B_{C^\infty} := B \otimes_{\mathcal{O}_M} C^\infty M$. **Тогда B_{C^∞} - локально тривиальный пучок $C^\infty M$-модулей.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: B_{C^∞} называется **гладкое векторное расслоение, ассоциированное с голоморфным расслоением B.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Естественное отображение $\operatorname{Tot}(B) \longrightarrow \operatorname{Tot}(B_{C^\infty})$ задает изоморфизм гладких многообразий

$\overline{\partial}$-оператор на расслоении

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть M – комплексное многообразие. Тогда **оператор $\overline{\partial}: C^\infty M \longrightarrow \Lambda^{0,1}(M)$ $\mathcal{O}_M$-линейный**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть B – голоморфное расслоение. Рассмотрим оператор $\overline{\partial}: B_{C^\infty} \longrightarrow B_{C^\infty} \otimes \Lambda^{0,1}(M)$, переводящий $b \otimes f$ в $b \otimes \overline{\partial} f$, где $b \in B$ голоморфное сечение, а f гладкая функция. Этот оператор зовется **оператор голоморфной структуры** на голоморфном расслоении. **Он определен корректно в силу $\mathcal{O}_M$-линейности $\overline{\partial}$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Ядро $\overline{\partial}: B_{C^\infty} \longrightarrow B_{C^\infty} \otimes \Lambda^{0,1}(M)$ **совпадает с образом B** при естественном вложении $B \hookrightarrow B_{C^\infty}$, $b \longrightarrow b \otimes 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **$\overline{\partial}$-оператор** на гладком комплексном векторном расслоении V над есть оператор $V \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{0,1}(M) \otimes V$, удовлетворяющий $\overline{\partial}(fb) = \overline{\partial}(f) \otimes b + f\overline{\partial}(b)$ для любых $f \in C^\infty M, b \in V$.

ЗАМЕЧАНИЕ: $\overline{\partial}$-оператор **можно продолжить до**

$$\overline{\partial}: \Lambda^{0,i}(M) \otimes V \longrightarrow \Lambda^{0,i+1}(M) \otimes V,$$

по формуле $\overline{\partial}(\eta \otimes b) = \overline{\partial}(\eta) \otimes b + (-1)^{\tilde{\eta}} \eta \wedge \overline{\partial}(b)$, где $b \in V$ и $\eta \in \Lambda^{0,i}(M)$.

Оператор голоморфной структуры

$$V \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{0,1}(M)\otimes V \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{0,2}(M)\otimes V \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{0,3}(M)\otimes V \xrightarrow{\overline{\partial}} \ldots$$

ЗАМЕЧАНИЕ: Легко видеть, что $\overline{\partial}^2 = 0$, если $\overline{\partial}$ – оператор голоморфной структуры на голоморфном расслоении B.

ТЕОРЕМА: (Атья-Ботт) Пусть $\overline{\partial}: V \longrightarrow \Lambda^{0,1}(M)\otimes V$ – $\overline{\partial}$-оператор на комплексном векторном расслоении, причем $\overline{\partial}^2 = 0$. **Тогда $B := \ker\overline{\partial} \subset V$ есть голоморфное расслоение того же ранга, и $V = B_{C^\infty}$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Это нетривиальное утверждение выводится из теоремы Ньюлендера-Ниренберга.

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы получили **эквивалентность категории голоморфных расслоений, и категории гладких комплексных расслоений, снабженных $\overline{\partial}$-оператором $\overline{\partial}: V \longrightarrow \Lambda^{0,1}(M)\otimes V$ таким, что $\overline{\partial}^2 = 0$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: $\overline{\partial}$-оператор $\overline{\partial}: V \longrightarrow \Lambda^{0,1}(M)\otimes V$ на гладком расслоении называется **оператором голоморфной структуры**, если $\overline{\partial}^2 = 0$

Связность и голоморфная структура

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть B – гладкое комплексное расслоение со связностью $\nabla : V \longrightarrow \Lambda^1(M)\otimes V$ и голоморфной структурой $\overline{\partial} : V \longrightarrow \Lambda^{0,1}(M)\otimes V$. Рассмотрим разложение ∇ по типам, $\nabla = \nabla^{0,1} + \nabla^{1,0}$, где

$$\nabla^{0,1} : V \longrightarrow \Lambda^{0,1}(M)\otimes V, \quad \nabla^{1,0} : V \longrightarrow \Lambda^{1,0}(M)\otimes V.$$

Говорится, что ∇ **совместима с голоморфной структурой**, если $\nabla^{0,1} = \overline{\partial}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Эрмитово голоморфное расслоение** есть гладкое комплексное расслоение, снабженное эрмитовой метрикой и голоморфной структурой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Связность Черна** на эрмитовом голоморфном расслоении есть связность, совместимая с голоморфной структурой и сохраняющая метрику.

Связность Черна

ТЕОРЕМА: На каждом голоморфном эрмитовом расслоении **связность Черна существует и единственна.**

Доказательство. Шаг 1: Для данного комплексного векторного расслоения V, определим **комплексно сопряженное расслоение** как то же самое $\mathbb{R}$-расслоение с комплексно сопряженным действием $\mathbb{C}$. Легко видеть, что **связность ∇ на V задает связность $\overline{\nabla}$ на $\overline{V}$,** причем $\overline{\nabla}^{1,0} = \overline{\nabla^{0,1}}$ и $\overline{\nabla}^{0,1} = \overline{\nabla^{1,0}}$.

Шаг 2: Определим **$\nabla^{1,0}$-оператор** на расслоении B как отображение $B \xrightarrow{\nabla^{1,0}} \Lambda^{1,0}(M) \otimes B$, удовлетворяющий $\Lambda^{1,0}(fb) = \partial(f) \otimes b + f\nabla^{1,0}(b)$ для любых $f \in C^\infty M, b \in B$. **Тогда $\overline{\partial}$-оператор на B задает $\nabla^{1,0}$-оператор на $\overline{B}$, и наоборот.**

Шаг 3: Эрмитова форма задает изоморфизм комплексных векторных расслоений $B \xrightarrow{g} \overline{B}^*$. Голоморфная структура $\overline{\partial}$ на B определяет $\overline{\partial}$-оператор $\overline{\partial}_{\overline{B}^*} := g\overline{\partial}g^{-1}$ на $\overline{B}^*$. Из него по формуле $\langle\overline{\partial}_{\overline{B}}x, y\rangle + \langle x, \overline{\partial}_{\overline{B}^*}y\rangle = \overline{\partial}\langle x, y\rangle$ **получается $\overline{\partial}$-оператор $\overline{\partial}_{\overline{B}}$ на $\overline{B}$, то есть $\nabla^{1,0}$-оператор $\nabla_g^{1,0}$ на B.**

Связность Черна (2)

Шаг 4: Мы получили оператор связности $\nabla := \bar\partial + \nabla_g^{1,0}$ на B. Осталось доказать, что она эрмитова.

Шаг 5: Пусть b, b' – сечения, $g^{\mathbb{C}}$ – комплексно-линейное спаривание B и $\overline{B}$, полученное из g, а $\bar{b}'$ – соответствующее сечение $\overline{B}$. По построению, ∇ удовлетворяет $dg(b,b') = dg^{\mathbb{C}}(b, \bar{b}') = g(\nabla b, \bar{b}') + g(b, \overline{\nabla b}')$, что дает (для голоморфного b)

$$dg(b,b) = g^{\mathbb{C}}(\nabla^{1,0} b, \bar{b}) + g^{\mathbb{C}}(b, \bar\partial_{\overline{B}} \bar{b}) = 2 \operatorname{Re} g(\nabla b, b).$$

Шаг 6: Поскольку эрмитовость достаточно проверять на голоморфных сечениях, $dg(b,b) = 2\operatorname{Re} g(\nabla b, b)$ **гарантирует эрмитовость ∇.** ■

ПРИМЕР: Пусть L – линейное расслоение, $b \in L$ – нигде не зануляющееся голоморфное сечение. **Тогда существует $(1,0)$-форма η такая, что $\nabla^{1,0} b = \eta \otimes b$.** Это дает $d|b|^2 = \operatorname{Re} g(\nabla^{1,0} b, b) = \operatorname{Re} \eta |b|^2$. **Мы получили**

$$\nabla^{1,0} b = \frac{\partial |b|^2}{|b|^2} b = 2\partial \log |b| b.$$

Кривизна связности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\nabla : B \longrightarrow B \otimes \Lambda^1 M$ связность на гладком расслоении. Продолжим ∇ до оператора на формах

$$V \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1(M) \otimes V \xrightarrow{\nabla} \Lambda^2(M) \otimes V \xrightarrow{\nabla} \Lambda^3(M) \otimes V \xrightarrow{\nabla} \dots$$

по формуле $\nabla(\eta \otimes b) = d\eta + (-1)^{\tilde\eta}\eta \wedge \nabla b$. Тогда оператор $\nabla^2 : B \longrightarrow B \otimes \Lambda^2(M)$ называется **кривизной** ∇.

ЗАМЕЧАНИЕ: Алгебра форм с коэффициентами в $\operatorname{End} B$ действует на $\Lambda^* M \otimes B$ по формуле $\eta \otimes a(\eta' \otimes b) = \eta \wedge \eta' \otimes a(b)$, где $a \in \operatorname{End}(B)$ эндоморфизм, а $b \in B$ сечение. Обозначим такое действие формулой $\eta \otimes a(\eta' \otimes b) = \eta \otimes a \wedge \eta' \otimes b$.

ЗАМЕЧАНИЕ: $\nabla^2(fb) = d^2 fb + df \wedge \nabla b - df \wedge \nabla b + f\nabla^2 b$, то есть **кривизна линейна над $C^\infty M$. Мы будем рассматривать кривизну B как 2-форму со значениями в $\operatorname{End} B$.** Тогда $\nabla^2 := \Theta_B \in \Lambda^2 M \otimes \operatorname{End} B$, где $\nabla^2(\eta \otimes b) = \Theta_B \wedge \eta \otimes b$, причем $\operatorname{End} B$-компонента Θ_B действует на b как указано выше.

Тождество Бьянки

ЗАМЕЧАНИЕ: $[\nabla, \{\nabla, \nabla\}] = [\{\nabla, \nabla\}, \nabla] + [\nabla, \{\nabla, \nabla\}] = 0$ по супер-тождеству Якоби. Это дает **тождество Бианки**: $\nabla(\Theta_B \wedge \eta) = \Theta_B \wedge \nabla(\eta)$.

Если B – линейное расслоение, то $\operatorname{End} B$ тривиально, и Θ_B есть 2-форма.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Кривизна линейного расслоения – замкнутая 2-форма.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Для любой $2i$-формы θ имеем $\nabla(\theta \wedge \eta) = d\theta \wedge \eta + \theta \wedge \nabla(\eta)$ (правило Лейбница). Тождество Бьянки дает $\nabla(\Theta_B \wedge \eta) = \Theta_B \wedge \nabla(\eta)$. Следовательно, $d\Theta_B = 0$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Аналогично доказывается, что $\operatorname{Tr}_B \Theta_B^i$ **есть замкнутая форма,** где Tr_B обозначает след в $\operatorname{End}(B)$, а Θ_B^i – i-я степень $\operatorname{End}(B)$-значной формы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Классы когомологий $\operatorname{Tr}_B \Theta_B^i$ называются **характеристическими классами** расслоения ("формула Гаусса-Бонне"). Если B – линейное расслоение, то класс $-\sqrt{-1}\,\Theta_B$ называется **первым классом Черна** B, и обозначается $c_1(B)$.

Кривизна связности Черна

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Кривизна Θ_B связности Черна есть (1,1)-форма.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть B – эрмитово расслоение. Рассмотрим оператор $\varphi \xrightarrow{\iota} -\varphi^\perp$, действующий на $\operatorname{End} B$, где $\varphi \longrightarrow \varphi^\perp$ - сопряжение. Поскольку $\iota^2 = \operatorname{Id}$ и этот оператор антикомплексный, ι **задает вещественную структуру на** $\operatorname{End} B$**.**

Шаг 2: Неподвижные точки ι суть антиэрмитовы матрицы. Обозначим расслоение антиэрмитовых матриц за $\mathfrak{u}_B$. Поскольку связность Черна сохраняет g, для ее кривизны имеем $\Theta_B(g) = 0$. Значит, $\Theta_B \in \Lambda^2 M \otimes \mathfrak{u}_B$, и **эта форма вещественна относительно вещественной структуры, заданной** ι**.**

Шаг 3: $(0,2)$-часть кривизны равна нулю, поскольку $\bar\partial^2 = 0$, а $(2,0)$-**часть кривизны равна нулю, потому что** $\iota(\Theta_B) = \Theta_B$, а **любая вещественная структура на расслоении переставляет** $(2,0)$ **и** $(0,2)$-**формы.** ■

СЛЕДСТВИЕ: Для связности Черна ∇, имеем $\Theta_B = \{\nabla^{1,0}, \bar\partial\}$.

СЛЕДСТВИЕ: **Кривизна линейного голоморфного расслоения - замкнутая (1,1)-форма.**

Кривизна линейного расслоения

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть B – линейное эрмитово расслоение, а b - незануляющееся голоморфное сечение. Тогда $\nabla^{1,0}b = \frac{\partial |b|^2}{|b|^2} b = 2\partial \log |b| b$, что дает $\Theta_B(b) = 2\bar\partial\partial \log |b| b$, то есть $\Theta_B = -2\partial\bar\partial \log |b|$

СЛЕДСТВИЕ: Если $g' = e^{2f}g$ – две метрики на голоморфном линейном расслоении, а Θ, Θ' – соответствующая кривизна, то $\Theta' - \Theta = -2\partial\bar\partial f$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть ω – (1,1)-форма с целочисленным классом когомологий на компактном кэлеровом многообразии. **Тогда ω есть кривизна голоморфного линейного расслоения.**

Доказательство. Шаг 1: Экспоненциальная точная последовательность $0 \longrightarrow \mathbb{Z}_M \longrightarrow \mathcal{O}_M \longrightarrow \mathcal{O}_M^* \longrightarrow 0$ дает

$$H^1(\mathcal{O}_M^*) \xrightarrow{\ c\ } H^2(M,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\ p\ } H^2(M,\mathcal{O}_M),$$

причем $H^1(\mathcal{O}_M^*) = \operatorname{Pic}(M)$ есть группа линейных расслоений, c – отображение, переводящее расслоение в его первый класс Черна, а p – проекция $H^2(M)$ на компоненту Ходжа $H^2(M,\mathcal{O}_M) = H^{0,2}(M)$. Значит, **для любого целочисленного класса $[\omega] \in H^{1,1}(M)$, $[\omega]$ является первым классом Черна линейного расслоения L.**

Кривизна линейного расслоения (2)

Шаг 2: Возьмем любую метрику h на L. Ее кривизна ω_h есть замкнутая $(1,1)$-форма, когомологичная ω. В силу dd^c-леммы, $\omega_h - \omega = -2\partial\overline{\partial} f$ **для какой-то функции** f**.**

Шаг 3: В силу доказанного выше, если $g' = e^{2f} g$ – две метрики на голоморфном линейном расслоении, а Θ, Θ' – соответствующая кривизна, то $\Theta' - \Theta = -2\partial\overline{\partial} f$.

Шаг 4: Рассмотрим метрику $h' := e^{2f} h$ на L. **Соответствующая ей кривизна удовлетворяет** $\omega_h - \omega_{h'} = -2\partial\overline{\partial} f$**, значит,** $\omega = \omega_{h'}$**.** ■