Комплексные многообразия 2: почти комплексные многообразия

Задача 2.1. Пусть $(, I)$ – однородное почти комплексное многообразие, то есть снабженное транзитивным действием группы Ли G, сохраняющей почти комплексную структуру. Предположим, что у точки $x \in M$ задан стабилизатор $g \in G$.

а. Пусть $g\Big|_{T_xM} = -1$ (в таком случае M называется **симметрическое многообразие**). Всегда ли (M, I) интегрируемо?

б. Пусть $g\Big|_{T_xM} = 2$. Всегда ли (M, I) интегрируемо?

в. Пусть все собственные значения $g\Big|_{T_xM}$ не равны 1. Всегда ли (M, I) интегрируемо?

Задача 2.2. Пусть (M, I) – почти комплексное многообразие, снабженное связностью ∇ без кручения, причем $\nabla(I) = 0$. Докажите, что оно интегрируемо.

Задача 2.3. Приведите пример почти комплексного многообразия (M, I), $\dim_{\mathbb{R}} M = 6$, на котором росток любой голоморфной функции – нулевой.

Задача 2.4. Может ли такое быть, если $\dim_{\mathbb{R}} M = 4$?

Задача 2.5. Пусть (M, I, Ω) – почти комплексное многообразие вещественной размерности $2n$, снабженное невырожденной комплекснозначной формой $\Omega \in \Lambda^{n,0}(M)$. Предположим, что $d\Omega = 0$. Докажите, что (M, I) интегрируемо.

Задача 2.6. Многообразие, снабженное распределением $B \subset TM$ коразмерности 1, таким, что форма Фробениуса $[B, B] \longrightarrow TM/B$ невырождена, называется **контактным**.

а. Постройте контактную структуру на нечетномерной сфере.

б. Постройте однородное компактное контактное многообразие, не диффеоморфное сфере.

Задача 2.7. Пусть (M, B) – контактное многообразие. Докажите, что любые две точки можно соединить кусочно гладким путем, касательным к B в каждой точке.

Задача 2.8. Пусть M – многобразие, снабженное транзитивным действием группы G, а $B \subset TM$ – G-инвариантное распределение. Предположим, что у точки $x \in M$ задан стабилизатор $g \in G$, причем $g\Big|_{T_xM} = -1$. Всегда ли B интегрируемо?