Комплексные многообразия 3: почти комплексные многообразия

Задача 3.1. Пусть на многообразии задано расслоение B и тензор $R \in B^{\otimes n}$, причем стабилизатор $St(R)$ в $\operatorname{End}(B)$ – локально тривиальное расслоение. Докажите, что найдется связность ∇ на B такая, что $\nabla(R) = 0$.

Задача 3.2. Пусть (M, ω) – симплектическое многообразие. Найдите связность без кручения на M такую, что $\nabla(\omega) = 0$.

Задача 3.3. Для любого заданного $n > 0$, найдите комплексное многообразие размерности n, не допускающее симплектической структуры.

Задача 3.4. Найдите почти комплексное, односвязное многообразие вещественной размерности 6, не допускающее симплектической структуры.

Замечание. Нет ни одного примера почти комплексного многообразия вещественной размерности 6, не допускающего комплексной структуры. Яу предполгает, что таких нет ("гипотеза Яу").

Задача 3.5. Постройте комплексную структуру на $SU(3)$. Может ли оно быть кэлерово?

Задача 3.6. Постройте комплексную структуру на $S^3 \times S^3$. Может ли оно быть кэлерово?

Задача 3.7. Постройте почти комплексное, компактное многообразие с заданной наперед конечно-порожденной фундаментальной группой.

Задача 3.8. **Алгебраическая размерность** комплексного многообразия есть степень трансцендентности его поля мероморфных функций над $\mathbb{C}$. Найдите алгебраическую размерность **поверхности Хопфа** $\mathbb{C}^2 \backslash 0/(x \sim 2x)$.