Комплексные многообразия 4: почти комплексные структуры и кручение

Задача 4.1. Пусть $\Psi : A \longrightarrow A'$ – отображение аффинных пространств, причем $\dim A > 1$. Предположим, что Ψ переводит прямые в прямые. Следует ли из этого что Ψ аффинно?

Задача 4.2. Пусть – симплектическое многообразие. Постройте связность без кручения, сохраняющую симплектическую структуру (то есть удовлетворяющую $\nabla\omega = 0$).

Задача 4.3. Пусть – комплексное многообразие. Постройте связность без кручения, сохраняющую комплексную структуру (то есть $\nabla I = 0$).

Задача 4.4. Пусть (M, I, ω) – почти комплексное эрмитово многообразие, $\dim_{\mathbb{C}} M = 2$. Всегда ли найдется связность ∇ с тотально антисимметричным кручением, такая, что $\nabla(I) = \nabla(\omega) = 0$?

Задача 4.5. Пусть (M, x, Ω) – вещественное многообразие с заданной на нем формой объема Ω и нигде не зануляющимся векторным полем x, причем $\operatorname{Lie}_x \Omega = 0$. Всегда ли найдется связность ∇ без кручения, такая, что $\nabla(x) = \nabla(\Omega) = 0$?[1]

Задача 4.6. Пусть ω – невырожденная 2-форма на четномерном римановом многообразии , причем $\nabla(\omega) = 0$, где ∇ – связность Леви-Чивита. Докажите, что M допускает комплексную структуру I, такую, что $\nabla(I) = 0$.

Задача 4.7. Пусть I, g – левоинвариантная комплексная эрмитова структура на группе Ли, причем метрика g инвариантна как справа, так и слева. Обозначим за T кручение соответствующей связности Бисмута. Докажите, что $T(x, y) = [x, y]$ для любой пары левоинвариантных векторных полей x, y.

Задача 4.8. Пусть G – компактная группа Ли с левоинвариантной комплексной структурой и левоинвариантной кэлеровой метрикой. Докажите, что G коммутативна.

[1] Такая связность называется связностью Бисмута.