Комплексные многообразия 7: когомологии Дольбо

Задача 7.1. Пусть η – замкнутый поток на шаре в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что η точен.

Задача 7.2. Пусть есть $\mathbb{R}^n$, с плоской метрикой. Определим обобщенную функцию N на X формулой

$$N(x) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\log|x|, & \text{если } n = 2 \\ -\frac{1}{(n-2)\sigma_{n-1}}|x|^{2-n}, & \text{если } n \neq 2 \end{cases}$$

где σ_{n-1} – объем n-мерной сферы. Докажите, что $\Delta(N) = \delta_0$, где Δ есть стандартный оператор Лапласа.

Задача 7.3. (локальная dd^c-лемма). Пусть η есть (p,q)-форма он $\mathbb{C}^n$, которая замкнута, причем $p, q \geqslant 1$. Докажите, что $\eta = dd^c\alpha$.

Задача 7.4. Пусть $dd^c f = 0$, где f – функция на комплексном многообразии. Докажите, что f есть сумма голоморфной и антиголоморфной функции.

Задача 7.5. Пусть η – замкнутая (1,1)-форма с компактным носителем на $\mathbb{C}^n$, $n > 1$. Докажите, что $\eta = dd^c f$, где f – функция с компактным носителем.

Задача 7.6. Пусть f – непрерывная функция на комплексном многообразии M, голоморфная в открытом, плотном подмножестве $U \subset M$. Докажите, что f голоморфна.

Задача 7.7. Постройте голоморфную функцию f на открытом шаре $B \subset \mathbb{C}^n$, такую, что f не продолжается голоморфно ни на какое открытое подмножество $B' \supset B$.

Задача 7.8. Определим **когомологии Ботта-Черна** $H^{1,1}_{BC}(M)$ как группу замкнутых $(1,1)$-форм по модулю образа dd^c. На произвольном комплексном многообразии постройте точную последовательность

$$H^0(\Omega^1(M)) \oplus \overline{H^0(\Omega^1(M))} \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_M) \oplus \overline{H^1(\mathcal{O}_M)} \longrightarrow H^{1,1}_{BC}(M) \longrightarrow H^2(M)$$

Здесь $H^0(\Omega^1(M))$ – глобальные 1-формы, $H^1(\mathcal{O}_M)$ – когомологии пучка голоморфных функций, а $\overline{\cdots}$ обозначает комплексно-сопряженное векторное пространство.