# Комплексные многообразия 9: голоморфные расслоения

**Определение 9.1.** Связность называется **совместимой с голоморфной структурой**, если $\nabla^{0,1} = \bar\partial$.

**Задача 9.1.** Пусть $B$ – голоморфное расслоение, а $\nabla$ – связность, совместимая с голоморфной структурой, причем $\nabla(b)$ голоморфно для любого голоморфного $b$. Докажите, что кривизна $\nabla$ – (2,0)-форма.

**Замечание.** В терминологии Атьи, такая связность называется **голоморфной**.[1]

**Задача 9.2.** Пусть $\nabla$ – связность на голоморфном расслоении, совместимая с голоморфной структурой, причем ее кривизна – (2,0)-форма. Докажите, что это голоморфная связность.

**Задача 9.3.** Пусть $L$ - линейное расслоение на компактном кэлеровом многообразии, допускающее голоморфную связность с кривизной $\Theta$. Докажите, что $\Theta = 0$.

**Задача 9.4.** Пусть $L$ – линейное расслоение на компактном комплексном многообразии $M$, причем $c_1(L) = 0$. Всегда ли найдется плоская эрмитова связность на $L$? А плоская связность, согласованная с голоморфной структурой? А если $M$ кэлерово?

**Задача 9.5.** Пусть $(L, h)$ - голоморфное линейное эрмитово расслоение, причем соответствующая связность Черна плоская. Докажите, что $h$ однозначно с точностью до константы задается голоморфной структурой на $L$.

**Задача 9.6.** Пусть $L$ – нетривиальное голоморфное линейное эрмитово расслоение на компактном комплексном многообразии а $-\sqrt{-1}\Theta$ – кривизна связности Черна. Предположим, что $\Theta \leqslant 0$, то есть все собственные значения $\Theta$ неположительны. Докажите, что у $L$ нет голоморфных сечений.

[1] Иногда люди называют "голоморфной" связность, совместимую с голоморфной структурой.