Классическая и адельная точка зрения в теории чисел — Экзамен

К. Конрад — Срок сдачи 22/12/2010 в 21:00

Инструкции.

- Экзамен обязательно для решения только для студентов, которые хотят отметку за курс. Срок сдачи написан выше.
- Скажите мне до 12 декабря, если Вы хотите писать этот экзамен, чтобы я знал от кого ждать решений.
- Не обсуждайте Вашу работу с другими. Можно мне писать, если у Вас возникнут вопросы. Мой email адрес – `kconrad@math.uconn.edu`.
- Если Вы не набираете работу на компьютере, пожалуйста пишите рязборчиво. (Я не хочу читать ужасный почерк.) Работы можно сдать Алексею Зыкину в конце его лекции по алгебраической теории чисел (НМУ, ком. 310, 21:00). Он пошлет мне по email копию Ваших решений и я Вам напишу, когда получу их.
- Если Вы набираете работу на компьютере, пошлите мне ее в виде .pdf файла. (Используйте вебсайт `http://www.pdfonline.com` если Вы не можете перевести Ваш файл в .pdf формат.) Я напишу Вам, что я получил файл, поэтому, если Вы от меня не получите письма, это значит, что я от Вас ничего не получил.
- Ни пуха ни пера!

1. (Вычисления)

   (a) Пусть $x \in \mathbf{Z}_5$ – такое решение уравнения $x^2 = -1$, что $x \equiv 2 \bmod 5\mathbf{Z}_5$. Вычислите $\{x/25\}_5$.

   (b) Пусть $\mathbf{a} = (3, -1/3, -1/3, 1, 1, \dots) \in \mathbf{A_Q}$, где ненаписанные члены равны 1. Вычислите $\Psi(\mathbf{a})$, где Ψ – стандартный характер на $\mathbf{A_Q}$.

   (c) Пусть $\mathbf{b} = (10, 20, 30, 40, 1, 1, \dots) \in J_{\mathbf{Q}}$, где ненаписанные члены равны 1. Используя изоморфизм $J_{\mathbf{Q}} \cong \mathbf{Q}^\times \times \mathbf{R}_{>0} \times \prod_p \mathbf{Z}_p^\times$, запишите $\mathbf{b}$ в виде $qt\mathbf{u}$, где $q \in \mathbf{Q}^\times$, $t > 0$, и $\mathbf{u} \in \prod_p \mathbf{Z}_p^\times$.

2. Пусть G – локально компактная абелева группа, H – компактная открытая подгруппа и $f \in L^1(G)$. Зафиксируем меру Хаара μ на G для того, чтобы определить преобразование Фурье $\widehat{f}\colon \widehat{G} \to \mathbf{C}$.

   a) Если $f(g) = 0$ для всех $g \notin H$, покажите, что $\widehat{f}\colon \widehat{G} \to \mathbf{C}$ постоянная функция на $H^\perp$-смежных классах в $\widehat{G}$: $\widehat{f}(\chi\psi) = \widehat{f}(\chi)$, если $\psi \in H^\perp$.

   b) Если f – постоянная функция на H-смежных классах в G (т.е., $f(gh) = f(g)$ для всех $h \in H$), покажите, что $\widehat{f}(\chi) = 0$ для всех $\chi \notin H^\perp$.

   (Указание для части b: запишите $\widehat{f}(\chi)$ как кратный интеграл по H и G/H, используя формулу Вейля.)

3. Покажите, что $\mathbf{A_Q}$ и $J_{\mathbf{Q}}$ – σ-компакты, т.е., каждое из них можно записать как счетное объеденение компактных подмножеств.

4. Пусть ψ – стандартный характер на $\mathbf{Q}_p$ и dx – стандартная мера Хаара на $\mathbf{Q}_p$.

   a) Для $n \in \mathbf{Z}$, покажите, что

$$\int_{|x|_p = 1/p^n} \psi(xy)\, dx = \begin{cases} 1/p^n - 1/p^{n+1}, & \text{если } y \in (1/p^n)\mathbf{Z}_p, \\ -1/p^{n+1}, & \text{если } y \in (1/p^{n+1})\mathbf{Z}_p - (1/p^n)\mathbf{Z}_p, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

   (Указание: Запишите интеграл как разность $\int_{p^n \mathbf{Z}_p} - \int_{p^{n+1}\mathbf{Z}_p}$.)

b) Для $x \in \mathbf{Q}_p$, пусть $f(x) = |x|_p \xi_{\mathbf{Z}_p}(x)$. Покажите, что

$$\widehat{f}(y) = \begin{cases} \frac{1}{1+1/p}, & \text{если } y \in \mathbf{Z}_p, \\ -\frac{1}{|y|_p^2} \frac{p}{1+1/p}, & \text{если } y \notin \mathbf{Z}_p. \end{cases}$$

5. Пусть p – простое число.

   a) В топологчиеской группе $\mathbf{R} \times \mathbf{Q}_p$, покажите $\mathbf{Z}$ (вложена диагонально) дискретна и не ко-компактна, а $\mathbf{Z}[1/p]$ (вложена диагонально) и дискретна и ко-компактна. Здесь $\mathbf{Z}[1/p] = \{a/p^n : a \in \mathbf{Z}, n \geq 0\}$ – множество всех дробей, знаменатель которых – степень числа p.

   b) Покажите, что считающая мера на $\mathbf{Z}[1/p]$, мера Хаара $dx \times dx_p$ на $\mathbf{R} \times \mathbf{Q}_p$, где dx_p – такая мера Хаара на $\mathbf{Q}_p$, что $\mathbf{Z}_p$ имеет меру 1, и нормализованная мера Хаара на $(\mathbf{R} \times \mathbf{Q}_p)/\mathbf{Z}[1/p]$ удовлетворяют формуле Вейля.

6. Пусть p – простое число. Группа $\mathbf{R} \times \mathbf{Q}_p$ самодвойственна. Для $(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{Q}_p$, определим $\chi_{(x,y)} \in \widehat{\mathbf{R} \times \mathbf{Q}_p}$ по формуле $\chi_{(x,y)}(u, v) = e^{-2\pi i x u} e^{2\pi i \{yv\}_p}$. (Обратите внимание на знак "-"!) Это задает самодвойственность на $\mathbf{R} \times \mathbf{Q}_p$.

   a) Для каждого $t \in \mathbf{Z}[1/p]$, покажите, что $t = \{t\}_p$ в $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

   b) Для самодвойственности группы $\mathbf{R} \times \mathbf{Q}_p$ описываемой выше, покажите, что $\mathbf{Z}[1/p]^{\perp} = \mathbf{Z}[1/p]$, где $\mathbf{Z}[1/p]$ вложена в $\mathbf{R} \times \mathbf{Q}_p$ диагонально.

7. (Бонус) Используя идеи с предыдущих двух вопросов, для любого конечного подмножества $S \subset V_{\mathbf{Q}}$ такого, что $\infty \in S$, найдите пример решетки L (т.е., дискретной и ко-компактной подгруппы) в $\prod_{v \in S} \mathbf{Q}_v$ такой, что $L^{\perp} = L$ относительно подходящей самодвойственности на группе $\prod_{v \in S} \mathbf{Q}_v$. Возможно ли найти пример такой решетки L, что $L^{\perp} = L$ в группе, которая построенна как адели, где один множитель $\mathbf{Q}_p$ (p – простое число) не используется?