Классическая и адельная точка зрения в теории чисел 23/9/2010

К. Конрад Задание 1

1. Предполагая, что $\zeta(s)$ – мероморфная функция на плоскости, докажите эквивалентность следующих условий:

   a) $\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(s)$,

   b) $Z(1-s) = Z(s)$, где $Z(s) = \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$.

   (Указание: используйте отношения $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$ и $\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2s-1}}\Gamma(2s)$.)

2. Рассмотрим числовые поля $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ и $\mathbf{Q}(\sqrt{-2})$.

   a) Докажите, что $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ и $\mathbf{Z}[\sqrt{-2}]$ евклидовы кольца.

   b) Используя теорему Гекке, найдите пополненные дзета-функции полей $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ и $\mathbf{Q}(\sqrt{-2})$ и явные функциональные уравнения каждой функции.

   c) Докажите функциональное уравнение пополненной дзета-функции поля $\mathbf{Q}(\sqrt{-2})$, используя тета-функции, как в случаях полей $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{Q}(i)$.

3. Прочитайте доказательство, используя теорему вычетов, того, что $e^{-\pi x^2}$ самодвойственная функция (т.е., она равна ей преобразованию Фурье) и покажите, что $\frac{2}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}$ самодвойственная функция.

4. Пусть $\{X_i\}_{i\in I}$ семейство локально-компактных пространств и $X = \prod_{i\in I} X_i$ их топологическое произведение. Тогда покажите что, если X тоже локально-компактное пространство, то X_i – компактно для весх, кроме конечного число индексов i (напр., $\mathbf{R}\times\prod_p \mathbf{Q}_p$ не локально-компактное пространство).