Классическая и адельная точка зрения в теории чисел 1/10/2010

К. Конрад Задание 2

1. Решетка в $\mathbf{R}^n$ не только подгруппа $\mathbf{R}^n$, которая изоморфна $\mathbf{Z}^n$, но она должна быть дискретна и ко-компактна.

   (a) Найдите подгруппу $\mathbf{R}^2$, которая изоморфна $\mathbf{Z}^2$, но не дискретна, поэтому не является решеткой. Нарисуйте картинку.

   (b) Если подгруппа $\mathbf{R}^n$ изоморфна $\mathbf{Z}^n$, дискретна ли она тогда и только тогда, когда она ко-компактна?

2. (Топология в $\mathbf{Q}_p$)

   (a) Покажите, что $\mathbf{Z}_p^\times$ – единственная максимальная компактная подгруппа $\mathbf{Q}_p^\times$: она компактная подгруппа и другие компактные подгруппы $\mathbf{Q}_p^\times$ содержатся в $\mathbf{Z}_p^\times$. (Пример: $1 + p^n\mathbf{Z}_p = \{x \in \mathbf{Z}_p : x \equiv 1 \bmod p^n\mathbf{Z}_p\}$ для всех $n \geq 1$.)

   (b) Хотя $\mathbf{Z}_p$ компактная (аддитивная) подгруппа $\mathbf{Q}_p$, покажите, что она не максимальна: существуют компактные подгруппы $\mathbf{Q}_p$, которые строго содержат $\mathbf{Z}_p$.

   (c) Покажите, что $\mathbf{Z}_p$ – единственное компактное подкольцо $\mathbf{Q}_p$ (то есть нет компактных подколец $\mathbf{Q}_p$ кроме $\mathbf{Z}_p$).

   (d) Пусть F – такое конечное расширение $\mathbf{Q}_p$, что $[F : \mathbf{Q}_p] > 1$. Так как кольцо целых $\mathcal{O}_F$ содержит $\mathbf{Z}_p$, $\mathcal{O}_F$ – не единственное компактное подкольцо F. Покажите, что $\mathcal{O}_F$ – максимальное компактное подкольцо F и $\mathcal{O}_F^\times$ – максимальная компактная подгруппа $F^\times$.

3. Группа иделей $J_\mathbf{Q}$ имеет свою идельную топологию, но можно рассматривать на ней и индуцированную топологию как подмножество аделей $\mathbf{A}_\mathbf{Q}$.

   (a) Когда $J_\mathbf{Q}$ имеет индуцированную топологию, найдите явную последовательность в $J_\mathbf{Q}$, которая сходится в $\mathbf{A}_\mathbf{Q}$, а последовательность обратных не сходится в $\mathbf{A}_\mathbf{Q}$. Это покаывает, что операция обращения на $J_\mathbf{Q}$ не непрерывна (поэтому $J_\mathbf{Q}$ не является топологической группой).

(b) Найдете ли Вы явное подмножество X в $J_{\mathbf{Q}}$, которое открыто по идельной топологии, но не открыто по индуцированой топологии в $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}$ (т.е. $X \neq U \cap J_{\mathbf{Q}}$ ни для какого отркытого множества U в $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}$)?

(c) Вложите группу $J_{\mathbf{Q}}$ в $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}} \times \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}$ формулой $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1})$. Используя на произведении $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}} \times \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}$ топологию произведения, покажите, что индуцированная топология на $J_{\mathbf{Q}}$ вложением совпадает со своей идельной топологии! (Это показывает, что можно использовать адельную топологию для того, чтобы определить идельную топологию, но нам нужны две копии аделей. Это работает для иделей и аделей всякого числового поля, не только $\mathbf{Q}$.)

4. (a) В $\mathbf{Z}[i]$, $5 = (1+2i)(1-2i)$. Это разложение на прстые множители. Покажите, что пополнения поля $\mathbf{Q}(i)$ относительно $(1+2i)$-адического и $(1-2i)$-адического нормирований единственно изоморфны $\mathbf{Q}_5$, но естественные вложения поля $\mathbf{Q}(i)$ в пополнениях $\mathbf{Q}(i)_{1+2i}$ и $\mathbf{Q}(i)_{1-2i}$ не совпадают: образ числа i в $\mathbf{Q}_5$ в каждом случае не равен друг дургу. (Указание: x^2+1 имеет два корня в $\mathbf{Q}_5$: $2+5+2\cdot 5^2+5^3+\cdots$ и $3+3\cdot 5+2\cdot 5^2+3\cdot 5^3+\cdots$.)

(b) Опишите пополнения поля $\mathbf{Q}(i)$ относительно их нормирований: какие архимедовы пополнения? Какие неархимедовы пополнения изоморфны $\mathbf{Q}_p$ и какие являются квадратичными расширениями $\mathbf{Q}_p$?

(c) Покажите, что $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}(i)}$ – свободный $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}$-модуль ранга 2 с базисом $(1,1,1,\dots)$ и $(i,i,i,\dots)$, где эти последовательности индексируются нормированиями $V_{\mathbf{Q}(i)}$.

(d) Для любого числового поля K покажите, что $\mathbf{A}_K$ – свободный $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}$-модуль ранга n, где $n = [K:\mathbf{Q}]$. (Это адельный аналог того, что $\mathcal{O}_K$ – свободный $\mathbf{Z}$-модуль ранга n.)