Классическая и адельная точка зрения в теории чисел 13/10/2010
К. Конрад Задание 4

1. a) Покажите, что $J_{\mathbf{Q}(i)} = \mathbf{Q}(i)^\times \cdot (\mathbf{C}^\times \times \prod_{v\neq\infty} \mathbf{Z}[i]_v^\times)$ и $\mathbf{Q}(i)^\times \cap (\mathbf{C}^\times \times \prod_{v\neq\infty} \mathbf{Z}[i]_v^\times) = \{\pm 1, \pm i\}$. Это аналог формулы $J_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}^\times \cdot (\mathbf{R}^\times \times \prod_p \mathbf{Z}_p^\times)$, где $\mathbf{Q}^\times \cap (\mathbf{R}^\times \times \prod_p \mathbf{Z}_p^\times) = \{\pm 1\}$.

   b) Используя то, что $\mathbf{R}^\times = \{\pm 1\} \times \mathbf{R}_{>0}$, можно улучшить уравнение $J_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}^\times \cdot (\mathbf{R}^\times \times \prod_p \mathbf{Z}_p^\times)$ к $J_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}^\times \times (\mathbf{R}_{>0} \times \prod_p \mathbf{Z}_p^\times)$. Давайте попытаемся обобщить это в $J_{\mathbf{Q}(i)}$ разложением $J_{\mathbf{Q}(i)}$ в части а. *Предпологая*, что есть разложение прямого произведения $\mathbf{C}^\times = \{\pm 1, \pm i\} \times H$ для некоторой подгруппы H of $\mathbf{C}^\times$, покажите, что возможно писать $J_{\mathbf{Q}(i)} = \mathbf{Q}(i)^\times \times G$ для некоторой G.

   Тогда покажите, что предположение не верно: $\mathbf{C}^\times \neq \{\pm 1, \pm i\} \times H$ для всякой H, т.к. $\mathbf{C}^\times$ не имеет никакой подгруппы индекса 4, а на самом деле $\mathbf{C}^\times$ не имеет никакой подгруппы конечного индекса больше 1.

2. Пусть K – числовое поле. Мы хотим показать, что J_K имеет разложение прямого произведения, согласующее с идельной нормой. Выбирайте архимедово нормирование v_0 на K. Запишите индексы (нормирования) в J_K для того, чтобы v_0-компонента в первой координате. Определите вложение $f_0\colon \mathbf{R}_{>0} \to J_K$, зависящее от того, что выделенное нормирование v_0 вещественно или комплексно, по формуле

$$f_0(t) := \begin{cases} (t, 1, 1, 1, \dots), & \text{если } v_0 \text{ – вещественно,} \\ (\sqrt{t}, 1, 1, 1, \dots), & \text{если } v_0 \text{ – комплексно.} \end{cases}$$

   Покажите, что отображение умножения $M\colon \mathbf{R}_{>0} \times J_K^1 \to J_K$, где $M(t, \mathbf{x}) = f_0(t)\mathbf{x}$ – изоморфизм топологических групп и оно ставится в коммутативной диаграмме внизу, где отображения вдоль верхного ряда – стандартные включение и проектирование подгрупп в прямом произведении групп, и отображения вдоль нижнего ряда – включение группы J_K^1 в J_K и идельная норма на J_K.

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & J_K^1 \arrow[r] \arrow[d, "\text{тожд.}"'] & \mathbf{R}_{>0} \times J_K^1 \arrow[r] \arrow[d, "M"'] & \mathbf{R}_{>0} \arrow[r] \arrow[d, "\text{тожд.}"'] & 1 \\
1 \arrow[r] & J_K^1 \arrow[r] & J_K \arrow[r, "||\cdot||"'] & \mathbf{R}_{>0} \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}
$$

(**Замечание**. Если K не имеет единственного архимедова нормирования, т.е., если K не является $\mathbf{Q}$ или мнимым квадратичнем полем, то изоморфизм $J_K \cong \mathbf{R}_{>0} \times J_K^1$ не канонический, т.к. он зависит от выбора v_0.)

3. Пусть G локально-компактная Хаусдорфова группа и μ мера Хаара на G.

   a) Если H не открытая подгруппа, то покажите, что ограничение $\mu|_H$ – мера Хаара на H.

   b) Дайте пример группы G и подгруппы H, которая не открыта такая, что $\mu|_H$ не является мерой Хаара на H.

4. Борелевская мера μ на топологическом пространством, удовлетворяющая двум условиям

$$\mu(A) = \inf_{\text{откр. } U \supset A} \mu(U), \qquad \mu(A) = \sup_{\text{комп. } K \subset A} \mu(K),$$

   для всех борелевских множеств называется *регулярной* мерой. Борелевская мера, удовлетворяющая первому условию для всех борелевских множеств A, а второму условию, когда A – открыта или σ-конечна, называется σ-*регулярной* мерой, так по определению мера Хаара – σ-регулярна. Это упражнение дает пример меры Хаара, которая не регулярна.

   Пусть $G = S^1 \times \mathbf{R}_d$, где $\mathbf{R}_d$ – прямая с дискретной топологией. Это прямое произведение двух локально-компактных (абелевых) групп, поэтому G – локально-компактна как топологическое произведение. Рассмотрите G как бесконечно длинный вертикальный цилиндр, горизонтальные сечения которого “топологически независимые” круги. Пусть μ – мера Хаара на G и $A = \{1\} \times [0, 1]$ (вертикальный отрезок единичной длины)

   a) Покажите, что множество A не открыто в G, а замкнуто.

   b) Покажите, что $\mu(K) = 0$ для всех компактных подмножеств K в A.

c) Пусть U – произвольное открытое множество в G, содержащее A. Поэтому

$$U \supset \bigcup_{0 \leq y \leq 1} (1-\varepsilon_y, 1+\varepsilon_y) \times \{y\},$$

где $0 < \varepsilon_y < 1$ для всех y. Покажите, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\varepsilon_y \geq \varepsilon$ для бесконечных многих y. (Указание: Предположите противное. Есть несчетно много y в $[0, 1]$.)

d) По части c, $U \supset (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times \{y\}$ для бесконечно многих $y \in [0, 1]$. Используйте это для того, чтобы показать, что $\mu(U) = \infty$ и заключите из σ-регулярности, что $\mu(A) = \infty$, поэтому μ не регулярна. (На странице 1 в книге Рудина "Анализ Фурье на Группах" утверждается, что всякая мера Хаара регулярна. Это не верно.)