10.09.2010
Листок 1

# Комплексы и когомологии

Пусть $A$ – ассоциативное кольцо с единицей. Говоря о модулях, мы будем иметь в виду левые $A$-модули.

*Когомологическим комплексом* называется набор модулей $K^i, i \in \mathbb{Z}$ и гомоморфизмов модулей $d^i\colon K^i \to K^{i+1}$ таких, что $d^2 = 0$ (т.е. $d^{i+1} \circ d^i = 0$ при всех $i$). Гомоморфизмы $d^i$ называются *дифференциалами*. Комплекс выглядит так:

$$\ldots \to K^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} K^0 \xrightarrow{d^0} K^1 \xrightarrow{d^1} K^2 \to \ldots$$

Часто используются нижние индексы и дифференциалы, понижающие градуировку: $K_i = K^{-i}, d_i = d^{-i}$. В таком случае говорят о *гомологическом комплексе*. Также часто вместо набора $K^i$ рассматривают градуированный модуль $K^\bullet = \oplus_i K^i$ и однородный гомоморфизм $d^\bullet\colon K^\bullet \to K^\bullet$ степени 1.

Примеры:

1. Модуль $M$ можно рассматривать как тривиальный комплекс : $K^i = 0$ при $i \neq 0$, $K^0 = M$ иначе, все $d^i = 0$.

2. Ещё один тривиальный комплекс: $\ldots 0 \to M \xrightarrow{\mathrm{Id}} M \to 0 \ldots$

3. $$\ldots \to \mathsf{k}[x]/(x^2) \xrightarrow{x} \mathsf{k}[x]/(x^2) \xrightarrow{x} \mathsf{k}[x]/(x^2) \to \ldots$$

4. Комплекс цепей/коцепей триангулированного гладкого многообразия/клеточного пространства/симплициального множества.

5. Комплекс де Рама на гладком многообразии.

6. Bar-резольвента: пусть $A$ – коммутативное кольцо, а $B$ – алгебра над $A$. Положим $K_i = 0$ при $i < -1$,
$$K_i = \underbrace{B \otimes_A B \otimes_A \ldots \otimes_A B}_{i+2 \text{ раза}}.$$
Дифференциал определим по формуле
$$d_k(b_0 \otimes b_1 \otimes \ldots \otimes b_{k+1}) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i b_0 \otimes \ldots \otimes b_i b_{i+1} \otimes \ldots \otimes b_{k+1}.$$
Отметим, что Bar-резольвента – комплекс $B, B$-бимодулей (или, что то же, $B \otimes_A B^{opp}$-модулей).

7. Комплекс Кошуля: пусть $A$ – коммутативное кольцо, $M$ – $A$-модуль, $m \in M$ – элемент. Положим
$$K^i = \Lambda^i_A M, \qquad d_i = m \wedge -.$$

*(Ко)циклами* комплекса $(K^\bullet, d^\bullet)$ называются модули $Z^i = \ker d^i$, *(ко)границами* называются модули $B^i = \operatorname{im} d^{i-1}$. Из-за соотношения $d^2 = 0$ имеем $B^i \subset Z^i \subset K^i$. Когомологиями комплекса называются модули $H^i = Z^i/B^i$, фактормодули циклов по границам. Комплекс, все когомологии которого равны нулю, называется *точным* или *ацикличным*.

10.09.2010
Листок 1

Морфизмом комплексов из $(K^\bullet, d_K^\bullet)$ в $(L^\bullet, d_L^\bullet)$ называется набор гомоморфизмов модулей $f^i\colon K^i \to L^i$ такой, что $df = fd$ (т.е., $d_L^i \circ f^i = f^{i+1} \circ d_K^i$). Морфизм комплексов выглядит так:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & K^{i-1} \arrow[r, "d_K^{i-1}"] \arrow[d, "f^{i-1}"] & K^i \arrow[r, "d_K^i"] \arrow[d, "f^i"] & K^{i+1} \arrow[r, "d_K^{i+1}"] \arrow[d, "f^{i+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & L^{i-1} \arrow[r, "d_L^{i-1}"] & L^i \arrow[r, "d_L^i"] & L^{i+1} \arrow[r, "d_L^{i+1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Со всяким морфизмом комплексов связан морфизм на когомологиях. Пусть

$$f^\bullet\colon (K^\bullet, d_K^\bullet) \to (L^\bullet, d_L^\bullet)$$

– морфизм. Определим гомоморфизм $H^i(K) \to H^i(L)$: пусть элемент $x \in Z^i$ представляет класс когомологий, сопоставим этому классу класс элемента $f^i(x)$ в $H^i(L)$. Несложно проверить, что всё корректно: $f^i(x)$ – коцикл и изменение $x$ на кограницу меняет $f^i(x)$ на кограницу.

Морфизм, индуцирующий изоморфизм в когомологиях, называется *квазиизоморфизмом*, а комплексы, между которыми существует цепочка квазиизоморфизмов (возможно, идущих в разные стороны), – *квазиизоморфными*.

**Задача 1.** Если кольцо $A$ – поле, то любой комплекс квазиизоморфен комплексу с нулевыми дифференциалами, образованному своими когомологиями.

Важное средство вычисления когомологий комплексов – длинная точная последовательность в когомологиях.

Набор модулей и гомоморфизмов $K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M$ называется *точной тройкой*, если комплекс $0 \to K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \to 0$ точен (т.е., $f$ инъективно, $g$ сюръективно и $\mathrm{im}(f) = \ker(g)$). Набор комплексов и морфизмов комплексов $K^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} L^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} M^\bullet$ называется точной тройкой комплексов, если для любого $i$ имеем точную тройку модулей $K^i \xrightarrow{f^i} L^i \xrightarrow{g^i} M^i$. Морфизмы $f$ и $g$ индуцируют морфизмы когомологий $H^i(K) \to H^i(L) \to H^i(M)$. Определим так называемый *связывающий гомоморфизм* $\delta^i\colon H^i(M) \to H^{i+1}(K)$.

Пусть $x \in Z^i(M)$ представляет класс в $H^i(M)$. Возьмём любой $y \in L^i$ так, что $g(y) = x$, пусть $z = d(y)$ Поскольку $g(z) = gd(y) = dg(y) = d(x) = 0$, найдётся $t \in K^{i+1}$ такой, что $f(t) = z$. При этом $fd(t) = df(t) = d(z) = dd(y) = 0$, значит и $d(t) = 0$. Положим $\delta([x]) = [t] \in H^{i+1}(K)$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K^{i+2} \arrow[r, "f"] & L^{i+2} & & \\
0 \arrow[r] & K^{i+1} \arrow[r, "f"] \arrow[u, "d"] & L^{i+1} \arrow[r, "g"] \arrow[u, "d"] & M^{i+1} \arrow[r] & 0 \\
 & & L^i \arrow[r, "g"] \arrow[u, "d"] & M^i \arrow[r] \arrow[u, "d"] & 0
\end{tikzcd}$$

**Задача 2.** Проверить, что класс когомологий $[t]$ не зависит от сделанных выборов.

**Предложение 1.** *Со всякой точной тройкой комплексов*

$$0 \to K^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} L^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} M^\bullet \to 0$$

*связана длинная точная последовательность когомологий*

$$\ldots \to H^{i-1}(M) \xrightarrow{\delta^{i-1}} H^i(K) \xrightarrow{H^i(f)} H^i(L) \xrightarrow{H^i(g)} H^i(M) \xrightarrow{\delta^i} H^{i+1}(K) \to \ldots$$

*Доказательство.* Проверим, например, точность в члене

$$H^i(L) \xrightarrow{H^i(g)} H^i(M) \xrightarrow{\delta^i} H^{i+1}(K).$$

Во-первых, $\delta H(g) = 0$. Пусть $x \in Z^i(L)$, тогда $H^i(g)([x]) = [g(x)]$, и по построению связывающего гомоморфизма $\delta([g(x)]) = 0$, так как $d(x) = 0$. Во-вторых, $\ker\delta = \operatorname{im} H(g)$. Пусть $x \in Z^i(M)$ представляет класс в $H^i(M)$ и $\delta([x]) = 0$, а $y, z, t$ – как в определении $\delta$. Так как $[t] = 0$, $t = d(s)$ для $s \in K^i$, положим $y' = f(s)$. Заметим, что $d(y - y') = z - df(s) = z - fd(s) = z - f(t) = z - z = 0$ и $g(y - y') = x - gf(s) = x$, следовательно $[x] = H^i(g)(y - y') \in \operatorname{im} H(g)$. $\square$

**Задача 3.** Проверьте точность длинной последовательности в остальных членах.

*Сдвигом* комплекса $(K^\bullet, d^\bullet)$ называется комплекс $(K[1]^\bullet, d[1]^\bullet)$, где $K[1]^i = K^{i+1}, d[1]^i = -d^{i+1}$ (обратите внимание на смену знака!) Сдвиги на произвольные целые числа определяются аналогично.

Несложно проверить, что инъективный или сюръективный (почленно) морфизм комплексов можно дополнить до точной тройки комплексов. Произвольный морфизм комплексов $f^\bullet\colon K^\bullet \to L^\bullet$ дополнить до точной тройки нельзя, однако можно построить точную тройку, для которой связывающие гомоморфизмы в когомологиях будут совпадать с гомоморфизмами, индуцированными $f^\bullet$. Соответствующая конструкция называется *конусом морфизма*.

Положим $C^i = K^{i+1} \oplus L^i$, определим дифференциалы

$$d^i_C(k^{i+1}, l^i) = (-d(k^{i+1}), f(k^{i+1}) + d(l^i)).$$

Легко видеть, что получится комплекс, он обозначается $C(f)^\bullet$. Имеют место естественные морфизмы $a^\bullet\colon L^\bullet \to C(f)^\bullet$ и $b^\bullet\colon C(f)^\bullet \to K[1]^\bullet$, они образуют точную тройку

$$0 \to L \xrightarrow{a} C(f) \xrightarrow{b} K[1] \to 0.$$

**Предложение 2.** *Связывающие гомоморфизмы $H(K) \to H(L)$ для указанной точной тройки совпадают с гомоморфизмами, индуцированными $f$.*

*Доказательство.* Пусть $x \in Z^{i+1}(K)$. По построению связывающего гомоморфизма берём $y = (x, 0) \in C(f)^i$, $z = d_C((x, 0)) = (-d(x), f(x)) = (0, f(x))$, $t = f(x) \in Z^{i+1}(L)$, значит $\delta([x]) = [t] = [f(x)]$. $\square$

Как вычислять когомологии комплекса? Один из способов – доказать, что они нулевые. Среди всех комплексов с нулевыми когомологиями проще всего устроены стягиваемые.

Морфизм комплексов $f^\bullet\colon K^\bullet \to L^\bullet$ называется *гомотопным нулю*, если существует набор морфизмов $h^i\colon K^i \to L^{i-1}$, для которых

$$f = dh + hd,$$

т.е., $f^i = d^{i_1}h^i + h^{i+1}d^i$. Два морфизма $f^\bullet, g^\bullet\colon K^\bullet \to L^\bullet$ *гомотопны*, если их разность гомотопна нулю. Очевидно, гомотопные нулю морфизмы образуют подгруппу, а гомотопия – отношение эквивалентности. Обозначение: $f^\bullet \sim g^\bullet$.

**Задача 4.** Сформулируйте и докажите: гомотопные нулю морфизмы образуют идеал.

**Предложение 3.** *Гомотопные морфизмы $f^\bullet, g^\bullet\colon K^\bullet \to L^\bullet$ индуцируют одинаковое отображение на когомологиях.*

*Доказательство.* Пусть $f - g = dh + hd$, а $x \in Z^i(K)$. Тогда $H(f)([x]) = [f(x)] = [g(x) + dh(x) + hd(x)] = [g(x)] + [dh(x)] = [g(x)]$, так как класс кограницы $dh(x)$ тривиален. □

**Задача 5.** Пусть $f^\bullet\colon K^\bullet \to L^\bullet$ – морфизм. Проверьте, что в последовательности

$$K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{a} C(f) \xrightarrow{b} K[1] \xrightarrow{f[1]} L[1]$$

композиции $af$ и $f[1]b$ гомотопны нулю.

Комплекс называется *стягиваемым* или *гомотопным нулю*, если его тождественное отображение в себя гомотопно нулю. Комплексы $K^\bullet$ и $L^\bullet$ называются *гомотопически эквивалентными*, если существуют $f^\bullet\colon K^\bullet \to L^\bullet$ и $g^\bullet\colon L^\bullet \to K^\bullet$ такие, что $fg \sim \mathrm{Id}_L, gf \sim \mathrm{Id}_K$.

Типичный пример стягиваемого комплекса – комплекс вида

$$\ldots 0 \to M \to M \to 0 \ldots \tag{1}$$

Верно и обратное:

**Задача 6.** Любой стягиваемый комплекс есть прямая сумма сдвигов комплексов вида (1).

**Задача 7.** Проверьте, что стягиваемый комплекс ацикличен, а гомотопически эквивалентные комплексы квазиизоморфны.

**Задача 8.** Проверьте, что морфизм комплексов – a) квазиизоморфизм $\Leftrightarrow$ его конус ацикличен; b) гомотопическая эквивалентность $\Leftrightarrow$ его конус стягиваем.

Сейчас мы вычислим гомологии Bar-резольвенты и (в некоторых случаях) комплекса Кошуля.

**Задача 9.** Покажите, что отображения $h_i\colon K^i \to K^{i+1}$:

$$h_i(b_0 \otimes \ldots \otimes b_{i+1}) = 1 \otimes b_0 \otimes \ldots \otimes b_{i+1}$$

задают гомотопию тождественного морфизма Bar-резольвенты нулю. Получаем, что Bar-резольвента стягиваема и тем самым ациклична (отметим, что мы построили гомотопию в категории правых $B$-модулей, а не бимодулей, но для вычисления гомологий это не важно).

Рассмотрим комплекс Кошуля для свободного конечно порождённого модуля $M = A^{\oplus r} = \oplus_1^r Ae_i$. Элемент $m$ имеет вид $m_1e_1 + \ldots + m_re_r$, $m_i \in A$.

**Задача 10.** a) Запишите дифференциал в комплексе Кошуля "в координатах".

b) Проверьте, что если в определении дифференциала комплекса Кошуля положить $- \wedge m$ вместо $m \wedge -$, то получится изоморфный комплекс.

*Двойственным комплексом* к комплексу $(K^\bullet, d^\bullet)$ называется комплекс $(K^{*\bullet}, d^{*\bullet})$, для которого $K^{*i} = \mathrm{Hom}_A(K^{-i}, A)$, а $d^{*i} = (d^{-i-1})^*$.

c) Вычислите двойственный комплекс к комплексу Кошуля.

Предположим, что для всякого $1 \leqslant i \leqslant r$ элемент $m_i$ – не делитель нуля в $A/(m_1, \ldots, m_{i-1})$ (в таком случае последовательность $m_1, \ldots, m_r$ называется *регулярной*).

**Предложение 4.** *В сделанных предположениях комплекс Кошуля $K(m)$ имеет нулевые когомологии при $i \neq r$, а $H^r(K(m)) = A/(m_1, \ldots, m_r)$.*

*Доказательство.* По индукции по $r$. При $r = 1$ очевидно. Перейдём от $r-1$ к $r$. Запишем $m = m' + m_re_r$. В комплексе Кошуля $K(m)$ есть подкомплекс $K(m') \wedge e_r$, соответствующий факторкомплекс изоморфен $K(m')$. Рассмотрим длинную точную последовательность в когомологиях, соответствующую точной тройке

$$0 \to K(m') \wedge e_r \to K(m) \to K(m') \to 0.$$

По предположению индукции она нулевая за исключением куска

$$0 \to H^{r-1}(K(m)) \to H^{r-1}(K(m')) \xrightarrow{\delta} H^r(K(m') \wedge e_r) \to H^r(K(m)) \to 0.$$

Связывающий гомоморфизм – это умножение на $\pm m_r$. Действительно, $K^{r-1}(m')$ порождена образующим $x = e_1 \wedge \ldots \wedge e_{r-1}$, выбираем $y = e_1 \wedge \ldots \wedge e_{r-1} \in K^{r-1}(m)$, получаем $z = d(y) = m \wedge y = \pm m_r e_1 \wedge \ldots \wedge e_r$, значит $t = \pm m_r x \wedge e_r \in K^{r-1}(m') \wedge e_r$. Т.о., кусок длинной точной последовательности имеет вид

$$0 \to H^{r-1}(K(m)) \to A/(m_1, \ldots, m_{r-1}) \xrightarrow{\pm m_r} A/(m_1, \ldots, m_{r-1}) \to H^r(K(m)) \to 0,$$

откуда получаем требуемое ввиду того, что $m_r$ – не делитель нуля в $A/(m_1, \ldots, m_{r-1})$. $\square$

Пусть $K^\bullet$ и $L^\bullet$ – комплексы. Определим *комплекс морфизмов* следующим образом. Положим

$$\mathrm{Hom}(K, L)^i = \prod_n \mathrm{Hom}(K^n, L^{n+i}),$$

а дифференциал $d^i$ переводит семейство $(f^n) \in \mathrm{Hom}(K, L)^i$ в семейство $(g^n) \in \mathrm{Hom}(K, L)^{i+1}$,

$$g^n = df^n - (-1)^i f^{n+1} d.$$

**Задача 11.** a) Проверьте, что это действительно дифференциал. b) Что такое циклы, границы и когомологии в комплексе морфизмов?