17.09.2010
Листок 2

Категории и функторы

Теория категорий почти не содержит теорем, но её язык чрезвычайно удобен и позволяет компактно формулировать и эффективно доказывать различные утверждения.

Если между объектами некоторого типа есть хорошо определённые морфизмы, то такие объекты образуют категорию. По определению, *категория* $\mathcal{C}$ состоит из:

- класса объектов $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$,
- множества морфизмов $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ для любых объектов $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$,
- закона композиции $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,C) : (f,g) \mapsto f \circ g$,

при этом должны быть выполнены свойства:

1. ассоциативность композиции: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ (если композиции имеют смысл);
2. существование тождественного эндоморфизма для любого объекта A: такого $1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,A)$, что $1_A \circ f = f$ и $f \circ 1_A = f$ (тогда, когда композиция имеет смысл).

Примеры категорий:

1. категория множеств $\mathcal{S}ets$: объекты – множества, морфизмы – отображения между множествами;
2. категория групп $\mathcal{G}rp$: объекты – группы, морфизмы – гомоморфизмы групп;
3. категория $A{-}\mathrm{Mod}$ левых модулей над кольцом A: объекты – A-модули, морфизмы – гомоморфизмы A-модулей;
4. категория $\mathrm{Kom}(A{-}\mathrm{Mod})$ комплексов A-модулей: объекты – комплексы A-модулей, морфизмы – морфизмы комплексов A-модулей;
5. категория топологических пространств $\mathcal{T}op$: объекты – топологические пространства, морфизмы – непрерывные отображения топологических пространств;
6. категория гладких многообразий $\mathcal{S}m$: объекты – гладкие многообразия, морфизмы – гладкие отображения гладких многообразий;
7. *дискретная категория* – любое множество можно рассматривать как категорию: объекты – элементы множества, морфизмы – по одному тождественному морфизму для каждого элемента;
8. любое частично упорядоченное множество можно рассматривать как категорию: объекты – элементы множества, из A в B есть единственный морфизм тогда и только тогда, когда $A \leqslant B$;
9. по любому упорядоченному графу можно построить категорию: объекты – вершины, морфизмы – цепочки последовательно идущих рёбер;
10. любую группу можно рассматривать как категорию: объект единственный, а в качестве его морфизмов в себя берётся группа;
11. …

Начальным объектом категории $\mathcal{C}$ называется такой объект I, что множество $\mathrm{Hom}(I, X)$ состоит из одного элемента для всех объектов X в $\mathcal{C}$. Двойственным образом, *конечный* объект категории $\mathcal{C}$ – это такой объект T, что множество $\mathrm{Hom}(X, T)$ состоит из одного элемента для всех объектов X.

Примеры: в категории множеств начальный объект – пустое множество, конечный объект – множество из одного элемента. В категории групп группа из одного элемента – это и начальный, и конечный объект. В категории колец начальный объект – кольцо целых чисел, а конечного объекта не существует. В категории "упорядоченное множество" начальный и конечный объекты – это наименьший и наибольший элементы (если они существуют).

Есть и более содержательные примеры.

Задача 1. a) Пусть $f\colon M \to N$ – гомоморфизм модулей. Опишите конечный объект в следующей категории. Объекты – пары (X, u), где X – модуль, а $u\colon X \to M$ – такой гомоморфизм, что $fu = 0$. Морфизмы из (X_1, u_1) в (X_2, u_2) – такие гомоморфизмы $g\colon X_1 \to X_2$, что $u_2 g = u_1$.
b) Пусть X – топологическое пространство, Y – множество, $f\colon X \to Y$ – отображение. Опишите начальный объект в следующей категории. Объекты – пары (Z, v), где Z – топологическое пространство, $v\colon Y \to Z$ – отображение множеств такое, что композиция vf непрерывна. Морфизмы из (Z_1, v_1) в (Z_2, v_2) – такие непрерывные отображения $g\colon Z_1 \to Z_2$, что $gv_1 = v_2$.
Задача 2. a) Докажите, что начальный объект в категории, если он есть, единствен с точностью до изоморфизма. b) Докажите, что конечный объект в категории, если он есть, единствен с точностью до изоморфизма. c) Предыдущий пункт можно было не решать. Почему?

Двойственной категорией $\mathcal{C}^\circ$ к категории $\mathcal{C}$ называется "категория $\mathcal{C}$ с обращёнными стрелками": $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^\circ = \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\circ}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$.

Если операция, применяемая к объектам некоторой категории, может быть естественно продолжена и на морфизмы, то такая операция называется функториальной.

(Ковариантный) функтор F из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{D}$ состоит из:

1. действия на объектах – правила, сопоставляющего каждому объекту $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ некоторый объект $F(A) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$;

2. действия на морфизмах – отображения $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ для всякой пары $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$;

при этом действие на морфизмы должно сохранять композицию и единицу: $F(\phi\psi) = F(\phi)F(\psi)$ и $F(1_A) = 1_{F(A)}$. *Контравариантный функтор* из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{D}$ – это по определению ковариантный функтор из $\mathcal{C}^\circ$ в $\mathcal{D}$.

Примеры:

1. Забывание: "тождественные" функторы $\mathcal{G}rp \to \mathcal{S}ets$, $\mathcal{T}op \to \mathcal{S}ets$, $\mathcal{S}m \to \mathcal{T}op$, $A-\mathrm{mod} \to \mathbb{Z}-\mathrm{mod}$;

2. двойственность (контравариантный функтор из категории k-векторных пространств в себя): $V \mapsto V^*$;

3. i-е сингулярные гомологии $\mathcal{T}op \to \mathcal{A}b$: $X \mapsto H_i(X, \mathbb{Z})$;

4. i-е сингулярные когомологии (контравариантный функтор) $\mathcal{T}op \to \mathcal{A}b$: $X \mapsto H^i(X, \mathbb{Z})$;

5. i-е гомотопические группы (функтор из категории топологических пространств с отмеченной точкой в группы): $(X, x) \mapsto \pi_i(X, x)$;

6. тензорные/симметрические/внешние степени модуля над коммутативным кольцом;

7. функтор Галуа (контравариантный) из категории расширений Галуа поля k (морфизмы – включения) в группы: $K \mapsto Gal(K/\mathsf{k})$

8. ...

Многие известные определения можно сказать на языке функторов. Например, представление группы G над полем k – это всё равно, что функтор из категории 10 из списка в категорию векторных пространств. Пучок множеств (абелевых групп, колец, ...) на топологическом пространстве X – это всё равно, что контравариантный функтор из категории открытых подмножеств X в категорию множеств (абелевых групп, колец, ...) Коммутативный квадрат в категории $\mathcal{C}$ – это всё равно, что функтор из категории

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

в категорию $\mathcal{C}$.

Очевидным образом определяются композиция функторов и тождественный функтор.

Прямое произведение категорий $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ определяется как категория $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$, объекты которой – пары (A, B), где $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}, B \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$, а морфизмы из (A_1, B_1) в (A_2, B_2) – это $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A_1, A_2) \times \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(B_1, B_2)$.

Пусть $\mathcal{C}$ – категория. Определим функтор $\operatorname{Hom}\colon \mathcal{C}^{\circ} \times \mathcal{C} \to \mathcal{S}ets$:
на объектах $(A, B) \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, на морфизмах $(f, g) \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\circ}\times\mathcal{C}}((A_1, B_1), (A_2, B_2))$ переходит в

$$u \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{S}ets}(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A_1, B_1), \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A_2, B_2)),$$

где для $h \in \operatorname{Hom}(A_1, B_1)$ имеем $u(h) = ghf \in \operatorname{Hom}(A_2, B_2)$:

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "h"] & B_1 \arrow[d, "g"] \\ A_2 \arrow[u, "f"] \arrow[r, "u(h)"] & B_2 \end{tikzcd}.$$

Проверим, что Hom – действительно функтор. Пусть (f_1, g_1) – морфизм из (A_1, B_1) в (A_2, B_2) (где $f_1 \in \operatorname{Hom}(A_2, A_1)$, а $g_1 \in \operatorname{Hom}(B_1, B_2)$), а (f_2, g_2) – морфизм из (A_2, B_2) в (A_3, B_3). Тогда их композиция – морфизм $(f_1 f_2, g_2 g_1)$. Функтор Hom переводит эти три морфизма в морфизмы $u\colon \operatorname{Hom}(A_1, B_1) \to \operatorname{Hom}(A_2, B_2)$, $v\colon \operatorname{Hom}(A_2, B_2) \to \operatorname{Hom}(A_3, B_3)$ и $w\colon \operatorname{Hom}(A_1, B_1) \to \operatorname{Hom}(A_3, B_3)$, необходимо проверить, что $vu = w$. Возьмём элемент $h \in \operatorname{Hom}(A_1, B_1)$. По определению, $u(h) = g_1 h f_1$, $v(u(h)) = g_2(g_1 h f_1) f_2$, а $w(h) = (g_2 g_1) h (f_1 f_2)$, то есть, всё сошлось.

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[rr, "h"] & & B_1 \arrow[d, "g_1"] \arrow[dd, bend left, "g_2 g_1"] \\ A_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[rr, "g_1 h f_1"] & & B_2 \arrow[d, "g_2"] \\ A_3 \arrow[u, "f_2"] \arrow[uu, bend left, "f_1 f_2"] \arrow[rr, "g_2 g_1 h f_1 f_2"] & & B_3 \end{tikzcd}$$

Наконец, определим морфизмы функторов (раньше их ещё называли естественные преобразования функторов).

Пусть F и G – функторы из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{D}$. *Морфизмом функторов* из F в G называется семейство морфизмов $\phi(A)\colon F(A) \to G(A)$, по одному для каждого объекта A в $\mathcal{C}$, такое, что для любого морфизма $f\colon A \to B$ в $\mathcal{C}$ диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\phi(A)"] \arrow[d, "F(f)"] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\phi(B)"] & G(B). \end{tikzcd}$$

Композиция морфизмов функторов и тождественный автоморфизм функтора определяются очевидным образом. Тем самым, определено понятие изоморфизма функторов.

Рассмотрим категорию точных троек комплексов: объекты – точные тройки комплексов модулей над фиксированным кольцом, морфизмы – коммутативные диаграммы вида

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_1^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & L_1^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & M_1^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K_2^\bullet \arrow[r] & L_2^\bullet \arrow[r] & M_2^\bullet \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Задача 3. Проверьте, что $H^i(K), H^i(L), H^i(M)$ – функторы на введённой категории, а связывающий гомоморфизм $\delta^i\colon H^i(M) \to H^{i+1}(K)$ – морфизм функторов.

Задача 4. Пусть A – коммутативное кольцо, Ω – фиксированный A-модуль. Определим функтор дуализации (контравариантный) $*\colon X \mapsto \mathrm{Hom}_A(X, \Omega)$.
a) Постройте морфизм функторов $\mathrm{Id}_{A-\mathrm{mod}} \to **$; b) Проверьте, что этот морфизм – изоморфизм для категории конечномерных k-векторных пространств и $\Omega = \mathsf{k}$.

Пусть X – объект некоторой категории $\mathcal{C}$. Определим функтор точек $h^X\colon \mathcal{C}^\circ \to \mathcal{S}ets$ равенствами:

$$h^X(Y) = \mathrm{Hom}(Y, X)$$

на объектах,

$$h^X(f)(-) = - \circ f\colon\ \mathrm{Hom}(Y_1, X) \to \mathrm{Hom}(Y_2, X)$$

для морфизма $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\circ}(Y_1, Y_2) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y_2, Y_1)$. Функтор $\mathcal{C}^\circ \to \mathcal{S}ets$, изоморфный функтору h^X для некоторого X, называется *представимым*, а X называется объектом, представляющим этот функтор.

Задача 5. Дайте определения функтора ко-точек и копредставимого функтора.

Задача 6 (лемма Йонеды). a) Пусть $F\colon \mathcal{C}^\circ \to \mathcal{S}ets$ – функтор, а X – объект $\mathcal{C}$. Постройте биекцию между множеством морфизмов функторов из h^X в F и множеством $F(X)$. b) Проверьте, что $\mathrm{Hom}_{Fun}(h^X, h^Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ (первое множество – морфизмы функторов). c) Проверьте, что объект, представляющий представимый функтор, определён однозначно с точностью до изоморфизма.

Допуская некоторую вольность, можно сказать, что сопоставление $X \mapsto h^X$ задаёт вложение категории $\mathcal{C}$ в категорию контравариантных функторов $\mathcal{C} \to \mathcal{S}ets$.

Многие конструкции удобно описывать на языке представимых функторов.

Пусть $X_i, i \in I$ – некоторое множество объектов категории $\mathcal{C}$. *Произведением* X_i называется объект, представляющий функтор $\prod_i \mathrm{Hom}(-, X_i)$. *Копроизведением* X_i называется объект, копредставляющий функтор $\prod_i \mathrm{Hom}(X_i, -)$. По лемме Йонеды произведение и копроизведение определены однозначно, если существуют. Обозначения: $\prod_i X_i$ и $\coprod_i X_i$.

Примеры: произведение в категории множеств – это прямое произведение, копроизведение в категории множеств – это несвязное объединение. Произведение и копроизведение в категории модулей над кольцом называются прямым произведением и прямой суммой, они изоморфны для конечного числа слагаемых. Произведение и копроизведение в категории подмножеств фиксированного множества – это пересечение и объединение.

Задача 7. Опишите произведение и копроизведение в категории a) коммутативных колец; b) колец; c) частично упорядоченных множеств; d) упорядоченных множеств; e) где объекты – натуральные числа, из m в n есть единственный морфизм, если $m|n$.

Ещё примеры: тензорное произведение модулей M и N – это модуль, копредставляющий функтор $X \mapsto$ множество билинейных отображений$M \times N \to X$. Тензорная алгебра k-векторного пространства V – это объект, копредставляющий функтор $A \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathsf{k}-vect}(V, A)$ на категории ассоциативных k-алгебр.

Пусть для пары функторов $L\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $R\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ имеется изоморфизм функторов

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L-, -) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, R-).$$

В таком случае L называется *левым сопряжённым* функтором к R, а R – *правым сопряжённым* функтором к L.

Примеры:

1. левый сопряжённый к функтору забывания $\mathcal{T}op \to \mathcal{S}ets$ – взятие дискретной топологии, правый сопряжённый – взятие топологии слипшихся точек;
2. левый сопряжённый к забыванию из групп в множества – взятие свободной группы;
3. левый сопряжённый к забыванию из коммутативных k-алгебр в k-векторные пространства – взятие симметрической алгебры;
4. левый сопряжённый к ограничению представления группы G на подгруппу H – индуцирование.

Задача 8. Докажите, что сопряжённый функтор определён однозначно с точностью до изоморфизма.

Задача 9. Найдите сопряжённые функторы к естественному вложению категории A-модулей в категорию комплексов A-модулей.

Задача 10. a) Пусть $A \to B$ – гомоморфизм колец. Докажите, что левым сопряжённым к функтору забывания $B-\mathrm{mod} \to A-\mathrm{mod}$ будет функтор расширения скаляров $M \mapsto B \otimes_A M$, а правым сопряжённым – функтор $M \mapsto \mathrm{Hom}_A(B, M)$.
b) Пусть A – коммутативное кольцо, S – центральная подалгебра, M – правый A-модуль. Проверьте, что правым сопряжённым к функтору $M \otimes_A -$ из A-модулей в S-модули будет функтор $\mathrm{Hom}_S(M, -)$.

При доказательстве сопряжённости функторов бывает полезным следующее утверждение.

Предложение 1. *Сопряжённость функторов $L\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ и $R\colon \mathcal{D}\to\mathcal{C}$ равносильна существованию морфизмов функторов $\mathrm{Id}_\mathcal{C}\to RL$ (единица) и $LR\to\mathrm{Id}_\mathcal{D}$ (коединица) таких, что композиции*

$$L\to LRL\to L \quad \text{и} \quad R\to RLR\to R$$

тождественны.

Доказательство. Пусть имеется изоморфизм функторов

$$\phi_{-,-}\colon\ \mathrm{Hom}_\mathcal{D}(L-,-)\cong\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(-,R-).$$

Построим единицу. Рассмотрим композицию морфизмов

$$\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(-,-)\to\mathrm{Hom}_\mathcal{D}(L-,L-)\xrightarrow{\phi_{-,L-}}\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(-,RL-).$$

По лемме Йонеды “по первому аргументу”, получаем морфизм $\mathrm{Id}_\mathcal{C}\to RL$. Другими словами, для объекта $X\in\mathcal{C}$ морфизм единицы $e_X\colon X\to RLX$ соответствует 1_{LX} при изоморфизме $\phi_{X,LX}\colon\ \mathrm{Hom}(LX,LX)\to\mathrm{Hom}(X,RLX)$. Построим коединицу. Рассмотрим композицию морфизмов

$$\mathrm{Hom}_\mathcal{D}(-,-)\to\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(R-,R-)\xrightarrow{\phi^{-1}_{R-,-}}\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(LR-,-).$$

По лемме Йонеды “по второму аргументу”, получаем морфизм $LR\to\mathrm{Id}_\mathcal{D}$. Для $Y\in\mathcal{D}$ коединица $LRY\to Y$ отвечает 1_{RY} при изоморфизме $\phi_{RY,Y}\colon\ \mathrm{Hom}(LRY,Y)\to\mathrm{Hom}(RY,RY)$. Проверим, что композиция $L\to LRL\to L$ тождественна на объекте X. Морфизм $LRLX\to LX$ получается из 1_{RLX} при изоморфизме $\phi^{-1}_{RLX,LX}\colon\ \mathrm{Hom}(RLX,RLX)\to\mathrm{Hom}(LRLX,LX)$. Рассмотрим коммутативную (потому, что ϕ – морфизм функторов) диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(RLX,RLX) \arrow[r, "\phi^{-1}_{RLX,LX}"] \arrow[d, "{(e_X,1)}"] & \mathrm{Hom}(LRLX,LX) \arrow[d, "{(e_X,1)}"] \\
\mathrm{Hom}(X,RLX) \arrow[r, "\phi^{-1}_{X,LX}"] & \mathrm{Hom}(LX,LX).
\end{tikzcd}$$

Вычисляя композицию стрелок, применённую к 1_{RLX}, получаем одним способом искомую композицию $LX\to LX$, а другим способом – тождественный морфизм.

Задача 11. Закончите доказательство. ☐

Зная понятия композиции функторов и тождественного функтора, несложно дать определение взаимно обратных функторов и изоморфизма категорий. Однако такое определение оказывается бесполезным – в природе изоморфизмов категорий не бывает. Причина этого проста: естественные конструкции часто строят объект, изоморфный исходному, но это уже не сам исходный объект. Типичный пример – дважды двойственное векторное пространство. Правильное понятие такое:

Категории $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ называются *эквивалентными*, если существуют функторы $F\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ и $G\colon\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ такие, что $FG\cong\mathrm{Id}_\mathcal{D}$ и $GF\cong\mathrm{Id}_\mathcal{C}$. Функторы F и G при этом называются *эквивалентностями* (а также *квазиобратными* друг другу).

Задача 12. a) Докажите что функтор $F\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ – эквивалентность тогда и только тогда, когда

1) (F *строго полный*) отображение $\mathrm{Hom}(X,Y)\to\mathrm{Hom}(F(X),F(Y))$ – биекция для всех $X,Y\in\mathcal{C}$ и

2) (F *существенно сюръективный*) любой объект в $\mathcal{D}$ изоморфен объекту вида $F(X)$.

b) Докажите, что категория конечномерных k-векторных пространств эквивалентна следующей: объекты – неотрицательные целые числа, морфизмы из n в m – матрицы размера $m\times n$ с элементами из k, композиция морфизмов – умножение матриц.