24.09.2010
Листок 3

Резольвенты и производные функторы

Вернёмся к модулям. Под модулем, как и прежде, мы понимаем левый модуль над фиксированным кольцом A. Через $A-\mathrm{mod}$ мы обозначаем категорию левых A-модулей. Отметим, что множество гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(M,N)$ в этой категории обладает структурой абелевой группы (а если кольцо A коммутативно, то и структурой A-модуля).

Функтор $F\colon A-\mathrm{mod} \to B-\mathrm{mod}$ называется *аддитивным*, если он линеен на морфизмах, т.е. отображение $F\colon \mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_B(F(M),F(N))$ – гомоморфизм групп для всех M,N.

Задача 1. a) Докажите, что функтор $F\colon A-\mathrm{mod} \to B-\mathrm{mod}$ аддитивен тогда и только тогда, когда $F(M\oplus N) \cong F(M)\oplus F(N)$ для всех M,N.

b) Если $L\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $R\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ – сопряжённые функторы, то L сохраняет копроизведения, а R – произведения.

c) Как следствие, сопряжённый функтор всегда аддитивен.

Пример неаддитивного функтора: тензорные, симметрические и внешние степени, например $M \mapsto M\otimes M$. Нас, однако, будут интересовать только аддитивные функторы, такие как Hom и $\otimes$, и мы будем предполагать в дальнейшем, что все рассматриваемые функторы аддитивны.

Напомним, последовательность называется *точной*, если когомологии её, рассмотренной как комплекс, нулевые, т.е. образ любой входящей стрелки совпадает с ядром выходящей.

Функтор (ковариантный) F называется *точным*, если для любой точной последовательности $K\to L\to M$ последовательность $F(K)\to F(L)\to F(M)$ точна. Функтор называется *точным слева* (соответственно *точным справа*), если для любой точной тройки $0\to K\to L\to M\to 0$ последовательность $0\to F(K)\to F(L)\to F(M)$ точна (соответственно последовательность $F(K)\to F(L)\to F(M)\to 0$ точна). Контравариантный функтор называется точным/точным слева/точным справа, если он точен/точен слева/точен справа как функтор $(A-\mathrm{mod})^\circ \to B-\mathrm{mod}$.

Примеры: тождественный и нулевой функторы точны. Функтор Hom точен слева по каждому из аргументов.

Лемма 1. *Пусть N – модуль. Тогда функторы* $\mathrm{Hom}(N,-)$ *и* $\mathrm{Hom}(-,N)$ *точны слева.*

Доказательство. Точность слева функтора $\mathrm{Hom}(N,-)$ более-менее очевидна.

Пусть $0\to K\xrightarrow{f} L\xrightarrow{g} M\to 0$ – точная тройка. Проверим, что последовательность $0\to \mathrm{Hom}(M,N)\to \mathrm{Hom}(L,N)\to \mathrm{Hom}(K,N)$ точна. 1) если $h\colon M\to N$ и $hg=0$, то $h=0$ так как g сюръективно. 2) если $h\colon L\to N$ и $hf=0$, то $h\mid_{\mathrm{im}\, f}=0$. Так как $\mathrm{im}\, f=\ker g$, $h\mid_{\ker g}=0$ и значит h имеет вид $h'g$ для некоторого $h'\colon M\to N$. □

Задача 2. Докажите, что точный слева функтор F переводит a) инъективные морфизмы в инъективные; b) точную последовательность вида $0\to K\to L\to M$ в точную последовательность $0\to F(K)\to F(L)\to F(M)$. Аналогично для точности справа.

Имеет место следующий критерий:

Лемма 2. *Последовательность $0\to K\to L\to M$ точна тогда и только тогда, когда для всех X точна последовательность* $0\to \mathrm{Hom}(X,K)\to \mathrm{Hom}(X,L)\to \mathrm{Hom}(X,M)$.

Задача 3. Докажите этот критерий, а также двойственный к нему.

Пусть M – правый A-модуль. Функтор тензорного умножения $M\otimes_A -\colon A-\mathrm{mod}\to \mathbb{Z}-\mathrm{mod}$ точен справа. Проще всего это проверять при помощи следующей леммы

Лемма 3. *Пусть F (левый) и G (правый) – сопряжённые функторы между категориями модулей. Тогда F точен справа, а G – слева.*

Доказательство. Проверим, что F точен справа. Пусть $K \to L \to M \to 0$ – точная последовательность. Точность $F(K) \to F(L) \to F(M) \to 0$ следует по предыдущей лемме из точности

$$0 \to \mathrm{Hom}(F(M), X) \to \mathrm{Hom}(F(L), X) \to \mathrm{Hom}(F(K), X)$$

при всех X. По сопряжённости, последняя последовательность изоморфна

$$0 \to \mathrm{Hom}(M, G(X)) \to \mathrm{Hom}(L, G(X)) \to \mathrm{Hom}(K, G(X)),$$

которая точна. □

Точная тройка $0 \to K \to L \to M \to 0$ называется *расщепимой*, если она изоморфна точной тройке вида $0 \to K \to K \oplus M \to M \to 0$, где морфизмы – вложение и проекция.

Задача 4. Проверьте, что точная тройка $0 \to K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \to 0$ расщепима тогда и только тогда, когда выполнено любое условие из a) f имеет правый обратный; b) g имеет левый обратный; c) для любого функтора F тройка $0 \to F(K) \to F(L) \to F(M) \to 0$ точна.

Модуль P называется *проективным*, если функтор $\mathrm{Hom}(P, -)$ точен. Двойственным образом, модуль I называется *инъективным*, если точен функтор $\mathrm{Hom}(-, I)$.

Эти свойства полезно переформулировать так: P проективен/I инъективен, если в любой соответствующей диаграмме

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed] \arrow[d] & \\ L \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[dl, dashed] \\ & I & \end{tikzcd}$$

всегда существует пунктирная стрелка, замыкающая диаграмму.

Несложно проверить следующие свойства: $\oplus P_i$ проективен тогда и только тогда, когда все P_i проективны, $\prod I_i$ инъективен тогда и только тогда, когда все I_i инъективны. Простейший пример проективного модуля – свободный, примеры инъективных модулей мы построим чуть позднее.

Задача 5. Приведите пример проективного не свободного модуля.

Проективной резольвентой модуля M называется комплекс вида

$$\ldots P_2 \to P_1 \to P_0 \to 0,$$

у которого $H_i(P) = 0$ при $i \neq 0$ и $H_0(P) = M$. Положив $P_{-1} = M$, резольвенту можно достроить до ацикличного комплекса

$$\ldots P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0.$$

Двойственным образом определяется инъективная резольвента.

Примеры: $\mathbb{Z} \xrightarrow{7} \mathbb{Z}$ – проективная резольвента $\mathbb{Z}$-модуля $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

$$\mathsf{k}[x,y] \xrightarrow{(-y,x)} \mathsf{k}[x,y] \oplus \mathsf{k}[x,y] \xrightarrow{\binom{x}{y}} \mathsf{k}[x,y]$$

– проективная резольвента $\mathsf{k}[x,y]$-модуля $\mathsf{k} = \mathsf{k}[x,y]/(x,y)$. Вообще, для регулярной последовательности $a_1, \ldots, a_r \in A$ комплекс Кошуля строит резольвенту A-модуля $A/(a_1, \ldots, a_r)$.

Bar-резольвента – это резольвента B как $B \otimes B^{opp}$-модуля. Как мог заметить внимательный слушатель, все приведённые примеры – свободные резольвенты.

Часто говорят, что в категории модулей над кольцом *достаточно много* проективных и инъективных модулей. Вот что это значит:

Лемма 4. *Любой модуль над кольцом – фактормодуль проективного и подмодуль инъективного.*

Доказательство. Про проективные модули очевидно – любой модуль M можно накрыть свободным с достаточно большим числом образующих, например, модулем $\oplus_{m \in M} A e_m$: образующая e_m переходит в $m \in M$. Доказательство того, что инъективных модулей достаточно много, мы пока отложим. $\square$

Предложение 5. *У любого модуля есть проективная и инъективная резольвенты.*

Доказательство. Рассмотрим проективный случай. Накроем заданный модуль M проективным модулем P_0. Пусть Z_0 – ядро $d_0 \colon P_0 \to M$. Накроем Z_0 проективным P_1 и рассмотрим сквозное отображение $d_1 \colon P_1 \to Z_0 \to P_0$. $\operatorname{im} d_1 = Z_0 = \ker d_0$, так что в 0-м члене комплекс $P_1 \to P_0 \to M \to 0$ точен. Далее накроем ядро d_1 проективным модулем P_2 и т.д. $\square$

Далее, морфизм модулей можно продолжить до морфизма резольвент. Верно даже несколько более общее утверждение.

Предложение 6. *Пусть $P_\bullet$ – комплекс проективных модулей с $P_i = 0$ при $i < 0$ и $H_0(P) = M$, $K_\bullet$ – резольвента модуля N, $f \colon M \to N$ – гомоморфизм. Тогда существует морфизм комплексов $f_\bullet \colon P_\bullet \to K_\bullet$, индуцирующий f на H_0.*

Доказательство. Добавим к $P_\bullet$ и $K_\bullet$ (-1)-е члены M и N.

$$\begin{tikzcd}
P_2 \arrow[r, "d_2"] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, dashed, "f_1"'] \arrow[dr, bend left, "f_0 d_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, dashed, "f_0"] \arrow[dr, bend left, "f d_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
K_2 \arrow[r, "d_2"] & K_1 \arrow[r, "d_1"] & K_0 \arrow[r, "d_0"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Теперь построим f_0. Так как P_0 проективен и d_0^K сюръективен, существует $f_0 \colon P_0 \to K_0$ такой, что $d_0^K f_0 = f d_0^P$. Далее, $f_0 d_1^P$ попадает в $\ker d_0^K$, а значит, в $\operatorname{im} d_1^K$. Т.к. P_1 проективен, существует $f_1 \colon P_1 \to K_1$ такой, что $d_1^k f_1 = f_0 d_1^P$. И так далее. $\square$

Конечно, у модуля есть много разных проективных резольвент. Однако, если рассматривать морфизмы комплексов с точностью до гомотопии, то резольвента единственна (с точностью до изоморфизма) и даже функториальна. Слушатель может этот факт проверить вручную, в стиле предыдущего доказательства, мы же приведём более концептуальное рассуждение. В его основе лежит следующая

Лемма 7. *Любой морфизм $f^\bullet$ из ограниченного справа комплекса проективных модулей $P^\bullet$ в ацикличный комплекс $K^\bullet$ гомотопен 0.*

Доказательство.

$$\begin{tikzcd}
P^{i-1} \arrow[r] & P^i \arrow[r, "d^i"] \arrow[dl, dashed, "h^i"'] \arrow[d, "f^i"'] & P^{i+1} \arrow[r, "d^{i+1}"] \arrow[dl, "h^{i+1}"'] \arrow[d, "f^{i+1}"] & P^{i+2} \arrow[dl, "h^{i+2}"'] \\
K^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}"] & K^i \arrow[r, "d^i"] & K^{i+1} \arrow[r] & K^{i+2}
\end{tikzcd}$$

Будем строить гомотопии $h^i\colon P^i \to K^{i-1}$ по очереди, начиная справа. Пусть $h^{i+1}, h^{i+2}, \ldots$ построены. Обозначим разность $g^i = f^i - h^{i+1}d^i$, тогда $d_i g_i = d^i f^i - d^i h^{i+1} d^i = f^{i+1}d^i - d^i h^{i+1} d^i = (f^{i+1} - d^i h^{i+1}) d^i = h^{i+2} d^{i+1} d^i = 0$, значит образ g^i лежит в $\operatorname{im} d^{i-1} = \ker d^i$. По проективности P_i, g^i имеет вид $d^{i-1}h^i$, что и требовалось. $\square$

Лемма 8. *Пусть $f^\bullet\colon K^\bullet \to L^\bullet$ – морфизм комплексов. Тогда для любого комплекса $X^\bullet$ имеется длинная точная последовательность*

$$\ldots \to \operatorname{Hom}^{i-1}(X^\bullet, C(f)^\bullet) \to \operatorname{Hom}^i(X^\bullet, K^\bullet) \to \operatorname{Hom}^i(X^\bullet, L^\bullet) \to \operatorname{Hom}^i(X^\bullet, C(f)^\bullet) \to \\ \to \operatorname{Hom}^{i+1}(X^\bullet, K^\bullet) \to \ldots,$$

где $\operatorname{Hom}^i(X^\bullet, Y^\bullet)$ *обозначает группу морфизмов из $X^\bullet$ в $Y[i]^\bullet$ по модулю морфизмов, гомотопных нулю.*

Доказательство. Рассмотрим расщепимую почленно точную последовательность комплексов $0 \to L^\bullet \to C(f)^\bullet \to K[1]^\bullet \to 0$. По ней строится последовательность комплексов морфизмов

$$0 \to \underline{\operatorname{Hom}}(X^\bullet, L^\bullet) \to \underline{\operatorname{Hom}}(X^\bullet, C(f)^\bullet) \to \underline{\operatorname{Hom}}(X^\bullet, K[1]^\bullet) \to 0.$$

Она точная, так как $\operatorname{Hom}(X^i, -)$ в расщепимую точную тройку точен. Применяя длинную точную последовательность в когомологиях, получаем требуемое, так как когомологии комплекса морфизмов – это морфизмы комплексов по модулю морфизмов, гомотопных нулю. $\square$

Теперь покажем, как морфизм модулей продолжить до морфизма резольвент. Пусть $P_\bullet$ – проективная резольвента M, $Q_\bullet$ – какая-то резольвента N. Рассмотрим морфизм $f\colon Q_\bullet \to N[0]$. Этот морфизм – квазиизоморфизм, значит его конус $C_\bullet$ ацикличен. По лемме 7 морфизмы из $P_\bullet$ во все сдвиги $C_\bullet$ гомотопны нулю. Применим предыдущую лемму к f и получим, что существует ровно один с точностью до гомотопии морфизм из $P_\bullet$ в $Q_\bullet$, продолжающий заданный морфизм $M \to N$. Если применить это рассуждение к двум проективным резольвентам одного модуля и тождественному гомоморфизму из этого модуля в себя, получим, что резольвенты гомотопически эквивалентны.

Наконец, определим производные функторы.

Пусть F – точный справа ковариантный функтор. Фиксируем для каждого модуля M некоторую проективную резольвенту $P(M)_\bullet$. Определим i-й *левый производный функтор* от F: на объектах

$$L_iF(M) = H_i(F(P(M)_\bullet)).$$

На морфизмах: пусть $f\colon M \to N$ – гомоморфизм модулей, продолжим его как-нибудь до гомоморфизма резольвент $f_\bullet\colon P(M)_\bullet \to P(N)_\bullet$ и положим

$$L_iF(f) = H_i(F(f_\bullet)).$$

Так как $f_\bullet$ и $F(f_\bullet)$ определены однозначно с точностью до гомотопии, индуцированное ими отображение на когомологиях определено однозначно. Отсюда следует корректность определения и то, что L_iF – функтор. *Правые производные функторы* R^iF от точного слева функтора F определяются аналогично с использованием инъективных резольвент.

Из определения сразу следует, что $L_iF = 0$ при $i < 0$ и $L_0F \cong F$. Также видно, что для точного F все $L_iF = 0$ при $i > 0$.

Задача 6. Определите производные от контравариантного функтора.

Точный функтор, применённый к короткой точной последовательности модулей, даёт снова короткую точную последовательность. Последовательность, полученная применением к

$$0 \to K \to L \to M \to 0$$

функтора F, точного лишь с одной стороны, уже не будет точна. Однако она может быть дополнена до *длинной точной последовательности производных функторов*. Для точного справа ковариантного F эта последовательность имеет вид

$$\begin{tikzcd}
\cdots & L_2F(K) \arrow[d] & L_1F(K) \arrow[d] & F(K) \arrow[d] & \\
\cdots & L_2F(L) \arrow[d] & L_1F(L) \arrow[d] & F(L) \arrow[d] & \\
\cdots & L_2F(M) \arrow[uur, "\delta"] & L_1F(M) \arrow[uur, "\delta"] & F(M) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Чтобы построить длинную точную последовательность, нужно продолжить точную тройку модулей до хорошей точной тройки резольвент.

Лемма 9. *Пусть* $0 \to K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \to 0$ *– точная тройка модулей,* $P_\bullet$ *и* $Q_\bullet$ *– проективные резольвенты* K *и* M*. Тогда существует проективная резольвента* $R_\bullet$ *модуля* L *и точная тройка комплексов* $0 \to P_\bullet \to R_\bullet \to Q_\bullet \to 0$*, продолжающая данную точную тройку и почленно расщепимая.*

Доказательство. Рассмотрим комплекс

$$\overline{P}_\bullet\colon \ \ldots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \xrightarrow{fd_0} L$$

(L находится в -1-й степени). Его когомологии – M в члене -1. Продолжим тождественный морфизм M до морфизма резольвент $Q_\bullet[-1] \to \overline{P}_\bullet$, пусть $C_\bullet$ – его конус. Тогда $C_\bullet$ ацикличен, младший член $C_{-1} = L$ и имеется точная почленно расщепимая тройка

$$0 \to \overline{P}_\bullet \to C_\bullet \to Q \to 0.$$

Отбрасывая от неё -1-е члены, получаем искомую проективную резольвенту $R_\bullet$ для L и точную тройку резольвент. $\square$

Теперь применим к построенной точной тройке резольвент точный справа функтор. Поскольку та расщепима, получим снова точную тройку комплексов. Соответствующая длинная точная последовательность в когомологиях и будет искомой длинной точной последовательностью производных функторов. Это – один из основных инструментов для вычисления производных функторов.

Задача 7. Проверьте, что a) связывающие гомоморфизмы $\delta_i\colon L_iF(M) \to L_{i-1}F(K)$ в длинной точной последовательности производных функторов не зависят от выбора резольвент; b) δ_i являются морфизмами функторов на категории точных троек модулей.

Задача 8. Проверьте, что точный справа функтор F точен тогда и только тогда, когда $L_1F(M) = 0$ для всех M.