1.10.2010
Листок 4

Функторы Ext

В прошлый раз мы определили классические производные функторы от точного слева или справа функтора на категории модулей. Сегодня мы рассмотрим главный пример производных функторов – функторы Ext.

Функтор Ext – это производный от функтора Hom. При этом Hom является точным слева функтором по каждому из двух аргументов, поэтому можно определить две серии правых производных функторов:

$$\mathrm{Ext}^i_I(M,N) = (R^i \operatorname{Hom}(-,N))(M) \quad \text{и} \quad \mathrm{Ext}^i_{II}(M,N) = (R^i \operatorname{Hom}(M,-))(N).$$

Несложно видеть, что морфизм модулей $N_1 \to N_2$ индуцирует морфизм производных функторов $\mathrm{Ext}^i_I(M,N_1) \to \mathrm{Ext}^i_I(M,N_2)$, тем самым Ext^i_I будет функтором от двух аргументов. Аналогично, Ext^i_{II} – функтор двух аргументов, и как мы позже увидим, эти бифункторы изоморфны. Пока же мы в это поверим.

Лемма 1. *Модуль P проективен* $\Leftrightarrow \mathrm{Ext}^i(P,N) = 0$ *при всех $i > 0$ и N* $\Leftrightarrow \mathrm{Ext}^1(P,N) = 0$ *при всех $i > 0$ и N.*

Доказательство. Действительно, если P проективен, то в качестве проективной резольвенты для P можно взять само P, и все высшие производные функторы будут автоматические нулевые. Наоборот: рассмотрим накрытие $F \to P$ свободным модулем, достроим его до точной тройки $0 \to K \to F \to P \to 0$ и применим к ней $\operatorname{Hom}(-,K)$. Получим длинную точную последовательность

$$\ldots \operatorname{Hom}(F,K) \to \operatorname{Hom}(K,K) \to \mathrm{Ext}^1(P,K) = 0.$$

Значит, вложение $F \to K$ расщепимо, и P – прямое слагаемое в F, а значит, проективный модуль. □

Задача 1. В рассуждениях выше мы использовали определение Ext как производного функтора по первому аргументу. Проведите доказательство для определения по второму аргументу.

Пример. Рассмотрим кольцо $A = \mathsf{k}[x_1,\ldots,x_n] = \mathsf{k}[V]$. Вычислим $\mathrm{Ext}^i(M,N)$, где $M = \mathsf{k}$ (с нулевым действием x_i), а $N = \mathsf{k}$ или A. Воспользуемся резольвентой Кошуля (сдвинутой на n) для $M = A^{\oplus n}$, $m = (x_1,\ldots,x_n) \in M$. Последовательность $x_1,\ldots,x_n \in A$ регулярная, значит комплекс Кошуля имеет единственные когомологии $A/(x_1,\ldots,x_n) = \mathsf{k}$. Применяя к $K^\bullet[n]$ функтор $\operatorname{Hom}(-,A)$, получим комплекс, изоморфный $K^\bullet$. Получаем:

$$\mathrm{Ext}^i(\mathsf{k},A) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq n, \quad \mathrm{Ext}^n(\mathsf{k},A) = \mathsf{k}.$$

А применяя к $K^\bullet[n]$ функтор $\operatorname{Hom}(-,\mathsf{k})$, мы получим комплекс с нулевыми дифференциалами и i-м членом $\Lambda^i(V)$. Следовательно,

$$\mathrm{Ext}^i(\mathsf{k},\mathsf{k}) = \Lambda^i(V).$$

Задача 2. Вычислите группы Ext^i между конечно порождёнными абелевыми группами.
Задача 3. Вычислите группы $\mathrm{Ext}^i(\mathsf{k},\mathsf{k})$ над $\mathsf{k}[x]/(x^2)$.

Пример – **когомологии Хохшильда**. Пусть A – алгебра над коммутативным кольцом k, свободная как k-модуль. Рассмотрим функтор из $A \otimes_{\mathsf{k}} A^{op}$-модулей в $\mathsf{k}-\mathrm{mod}$:

$$M \mapsto \{m \mid \forall a \; am = ma\}.$$

Он точен слева, его правые производные функторы называются *когомологиями Хохшильда алгебры (с коэффициентами в модуле)* и обозначаются $HH^i(A,-)$. Чтобы их вычислять, заметим, что описанный функтор – это на самом деле $\mathrm{Hom}_{A\otimes A^{op}}(A,-)$, а производные от него функторы – $\mathrm{Ext}^i_{A\otimes A^{op}}(A,-)$. При их вычислении можно пользоваться Bar-резольвентой – свободной резольвентой A как $A\otimes A^{op}$-модуля:

$$K_n = A^{\otimes n+2}, \quad d_n(a_0\otimes\ldots\otimes a_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_0\otimes\ldots\otimes a_i a_{i+1}\otimes\ldots\otimes a_{n+1}.$$

Заметим, что $\mathrm{Hom}_{A\otimes A^{op}}(A^{\otimes n+2},M) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{k}}(A^{\otimes n},M)$. Учитывая это, получаем комплекс, вычисляющий $HH^i(M)$:

(1) $K^n = \mathrm{Hom}(A^{\otimes n},M)$,

$$(d^n f)(a_1\otimes\ldots\otimes a_{n+1}) = a_1 f(a_2\otimes\ldots\otimes a_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(a_1\otimes\ldots\otimes a_i a_{i+1}\otimes\ldots\otimes a_{n+1}) + $$
$$+ (-1)^{n+1} f(a_1\otimes\ldots\otimes a_n)a_{n+1}.$$

Задача 4. a) Проверьте приведённую формулу для дифференциала.
b) Что такое $HH^0(A,A)$?
c) Проверьте, что 1-коциклы и 1-кограницы в (1) – это дифференцирования $A\to M$ и дифференцирования вида $a\mapsto am-ma$ соотв.

Пусть $(A,\cdot)$ – ассоциативная алгебра. Её инфинитезимальная деформация – это алгебра $(A\langle\varepsilon\rangle,*)$, где ε коммутирует с A и $\varepsilon^2=0$, такая что умножение $*$ совпадает с $\cdot$ по модулю ε. Умножение в такой алгебре однозначно задаётся формулой

$$a*b = a\cdot b + f(a\otimes b),$$

где $f\colon A\otimes A\to A$ – гомоморфизм модулей.
Задача 5. Проверьте, что a) умножение $*$ ассоциативно $\Leftrightarrow$ f – 2-коцикл в комплексе (1) для $M=A$,
b) деформированная алгебра изоморфна тривиальной $\Leftrightarrow$ f – 2-кограница.

Вариация предыдущего примера – **когомологии группы**. Пусть G – группа, под G-модулем мы будем иметь в виду модуль над $\mathbb{Z}[G]$, т.е. абелеву группу с действием G. Рассмотрим функтор инвариантов из G-модулей в $\mathcal{A}b$:

$$M\mapsto M^G = \{m\mid \forall g\ gm=m\}.$$

Он точен слева, его правые производные функторы называются *когомологиями группы (с коэффициентами в модуле)* и обозначаются $H^i(G,-)$. Для вычисления полезно заметить, что $M^G = \mathrm{Hom}^G(\mathbb{Z},M)$, где $\mathbb{Z}$ обозначает тривиальный G-модуль, поэтому $H^i(G,M) = \mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},M)$. Свободную $\mathbb{Z}[G]$-резольвенту модуля $\mathbb{Z}$ можно получить, домножая тензорно Bar-резольвенту для $\mathbb{Z}[G]$ над $\mathbb{Z}[G]$ справа на $\mathbb{Z}$. Так как Bar-резольвента (с -1-м членом) состоит из свободных правых $\mathbb{Z}[G]$-модулей, тензорное умножение сохранит точность и получится резольвента:

(2) $$K^n = \mathbb{Z}[G]^{\otimes n+1}, \quad d_n(g_0\otimes\ldots\otimes g_n) = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i g_0\otimes\ldots\otimes g_i g_{i+1}\otimes\ldots\otimes g_n + (-1)^n g_0\otimes\ldots\otimes g_{n-1}.$$

Применяя к ней $\mathrm{Hom}^G(-, M)$, получим комплекс, вычисляющий $H^i(G, M)$:

$$K^n = \mathrm{Hom}^G(\mathbb{Z}[G]^{\otimes n+1}, M) = \mathrm{Hom}(G^{\times n}, M),$$
$$(d^n f)(g_1, \dots, g_{n+1}) = g_1 f(g_2, \dots, g_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{n+1}) + \\ + (-1)^{n+1} f(g_1, \dots, g_n).$$

Его коциклы/кограницы называют коциклами/кограницами G с коэффициентами в M. Однако на практике пользоваться этим комплексом не очень удобно – он слишком велик. Более компактные резольвенты $\mathbb{Z}$ над $\mathbb{Z}[G]$ можно получать при помощи следующей топологической конструкции.

Пусть X – клеточное пространство с действием группы G, при этом действие согласовано с клеточным разбиением и свободно на клетках каждой размерности. Предположим, что X ациклично: $H^0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $H^i(X, \mathbb{Z}) = 0$ при $i > 0$. Тогда комплекс коцепей $C^\bullet(X, \mathbb{Z})$ будет комплексом свободных $\mathbb{Z}[G]$-модулей, и при этом будет резольвентой для $\mathbb{Z}$.

Задача 6. Пусть Y – связное клеточное пространство, односвязная накрывающая которого ациклична, и пусть $G = \pi_1(Y)$. Тогда $H^i(G, \mathbb{Z}) = H^i(Y, \mathbb{Z})$.

Задача 7.

a) Получите резольвенту (2) при помощи описанной топологической конструкции.

b) Опишите явно $H^1(G, \mathbb{Z})$.

c) Вычислите $H^i(G, \mathbb{Z})$ для $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, для $G = \mathbb{Z}^n$ (что это напоминает?), для G – свободной группы.

При помощи 2-когомологий группы удобно описывать её расширения. Для простоты, ограничимся расширениями вида $1 \to A \to G' \xrightarrow{p} G \to 1$, где A – абелева группа. Так как A нормальна, с таким расширением связано действие G' на A: $g(a) = gag^{-1}$. При этом сама A действует тривиально, это превращает A в G-модуль. Предположим, расширение расщепимо, т.е. существует гомоморфизм $s\colon G \to G'$ такой, что $ps = 1_G$. Как описать все такие расщепления? Они имеют вид отображений $s'\colon g \mapsto \beta(g)s(g)$, где $\beta(g_1 g_2) = \beta(g_1) \cdot g_1(\beta(g_2))$, т.е. соответствуют 1-коциклам G со значениями в A.

Теперь изучим препятствия к расщеплению расширения. Рассмотрим расщепление $s\colon G \to G'$ отображения p на уровне множеств. Положим $\alpha(g_1, g_2) = s(g_1 g_2)s(g_2)^{-1}s(g_1)^{-1}$. Так как $p(\alpha) = 1$, то $\alpha \in A$. Можно проверить, что $\alpha(g_1, g_2 g_3) \cdot g_1(\alpha(g_2, g_3)) = \alpha(g_1 g_2, g_3) \cdot \alpha(g_1, g_2)$, т.е. α – 2-коцикл G со значениями в A. При этом если заменить s на s': $s'(g) = \beta(g)s(g)$, где $\beta(g) \in A$, то α заменится на α': $\alpha'(g_1, g_2) = \alpha(g_1, g_2) \cdot \beta(g_1 g_2) \cdot g_1(\beta(g_2))^{-1} \cdot \beta(g_2)^{-1}$, т.е. изменится на 2-кограницу. Таким образом, вторые когомологии G с коэффициентами в A классифицируют расширения G при помощи A.

Задача 8. Проведите соответствующие вычисления.

Вернёмся к функторам Ext. Название Ext означает extension, т.е. расширение. Причина этого в том, что $\mathrm{Ext}^1(M, N)$ классифицирует расширения модуля M с помощью N.

Расширение M с помощью N – это точная тройка $0 \to N \to K \to M \to 0$. Два расширения изоморфны, если существует диаграмма

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & N_1 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Предложение 2. *Множество классов изоморфизма расширений M с помощью N изоморфно* $\mathrm{Ext}^1(M, N)$.

Для доказательства нам понадобится понятие расслоенного произведения и копроизведения в категории. Пусть $X \xrightarrow{f} Z$ и $Y \xrightarrow{g} Z$ – два морфизма в некоторой категории. Расслоенным произведением $X \times_Z Y$ называется объект, представляющий функтор $T \mapsto \{(a, b) \mid fa = gb\} \subset \mathrm{Hom}(T, X) \times \mathrm{Hom}(T, Y)$. Иначе говоря, это конечный объект в категории коммутативных диаграмм вида

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"] & Z. \end{tikzcd}$$

Двойственным образом определяется расслоенное копроизведение (или, что то же, корасслоенное произведение).

Задача 9. Докажите, что расслоенные и корасслоенные произведения в категории модулей существуют (и значит, единственны).

Доказательство предложения. Сопоставим расширению элемент в $\mathrm{Ext}^1(M, N)$. Напишем длинную точную последовательность производных функторов для $\mathrm{Hom}(-, N)$. В ней будет кусок $\mathrm{Hom}(N, N) \to \mathrm{Ext}^1(M, N)$, возьмём образ 1_N в качестве искомого элемента. Опишем это соответствие более явно. Фиксируем проективную резольвенту $P_\bullet$ для M. Построим морфизм комплексов $f_\bullet$

$$\begin{tikzcd} P_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "f_1"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & K \arrow[r] & M \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Гомоморфизм $f_1 \in \mathrm{Hom}(P_1, N)$ задаёт нужный класс в коциклах комплекса $\mathrm{Hom}(P_\bullet, N)$, вычисляющего $\mathrm{Ext}^i(M, N)$. При этом замена $f_\bullet$ на гомотопный морфизм изменяет f_1 на кограницу в $\mathrm{Hom}(P_\bullet, N)$.

Проверим инъективность сопоставления. Действительно, если для двух расширений элементы в $\mathrm{Ext}^1(M, N)$ равны, то можно, заменяя $f_\bullet$ на гомотопный, считать, что f_1 тоже равны. А по f_1 расширение восстанавливается: можно проверить, что K равно корасслоенному произведению $N \times^{P_1} P_0$.

Проверим сюръективность. Если задан гомоморфизм $f_1 \in \mathrm{Hom}(P_1, N)$ такой, что $f_1 d_2 = 0$, положим $K = N \times^{P_1} P_0$. Гомоморфизм $s\colon N \to N \times^{P_1} P_0$ будет инъективен: если $s(n) = 0$, то (по конструкции корасслоенного произведения) $n = f_1(p_1)$ и $d_1(p_1) = 0$. Значит, $p_1 = d_2(p_2)$ и $n = f_1 d_2(p_2) = 0$. Чтобы задать морфизм t из $N \times^{P_1} P_0$ в M, рассмотрим пару гомоморфизмов $0\colon N \to M$ и $d_0\colon P_0 \to M$, совпадающие на P_1. Можно проверить, что $0 \to N \xrightarrow{s} K \xrightarrow{t} M \to 0$ будет искомым расширением. □

Задача 10. Сколько различных неизоморфных абелевых групп можно получить, расширяя $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ при помощи $\mathbb{Z}$?

Высшие группы Ext тоже можно описывать при помощи расширений, только отношение эквивалентности выглядит немного хитрее.

Предложение 3 (Ext по Йонеде). *Докажите, что имеется биекция между* $\mathrm{Ext}^i(M, N)$ *и классами эквивалентности точных последовательностей*

$$0 \to N \to K_{i-1} \to \ldots \to K_0 \to M \to 0.$$

Две последовательности эквивалентны, если их можно соединить цепочкой элементарных эквивалентностей вида

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & K_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & K_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & K'_{i-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & K'_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Набросок доказательства. Как и выше, фиксируем проективную резольвенту $P_\bullet$ для M. Построим морфизм резольвент (рисунок для $i = 3$)

$$\begin{tikzcd}
P_4 \arrow[r] \arrow[d] & P_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & P_2 \arrow[r] \arrow[d] & P_1 \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & K_2 \arrow[r] & K_1 \arrow[r] & K_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

и сопоставим точной последовательности класс коцикла $f_i \in \operatorname{Hom}(P_i, N)$ в комплексе $\operatorname{Hom}(P_\bullet, N)$.

Обратно, по морфизму $f_i\colon P_i \to N$ построим расширение. Положим $K_{i-1} = N \times^{P_i} P_{i-1}$, $K_l = P_l$ при $0 \leqslant l \leqslant i-2$. Морфизм $d_i\colon N \to K_{i-1}$ – канонический, морфизм $d_{i-1}\colon K_{i-1} \to P_{i-2}$ строится исходя из универсального свойства $N \times^{P_i} P_{i-1}$. Проверки показывают, что получается коммутативная диаграмма точных последовательностей (опять $i = 3$)

(3)
$$\begin{tikzcd}
P_4 \arrow[r] \arrow[d] & P_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & P_2 \arrow[r] \arrow[d] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & N \times^{P_3} P_2 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Наконец, если дано другое расширение $0 \to N \to K'_{i-1} \to \ldots \to K'_0 \to M \to 0$, соответствующее тому же гомоморфизму $f_i\colon P_i \to N$, то строится элементарная эквивалентность из второй строки (3) в это расширение. $\square$

Задача 11. Пусть $u\colon M' \to M$ – гомоморфизм. Проверьте, что индуцированное отображение $\operatorname{Ext}^i(M, N) \to \operatorname{Ext}^i(M', N)$ переводит класс последовательности $0 \to N \to K_{i-1} \to \ldots \to K_0 \to M \to 0$ в класс последовательности

$$0 \to N \to K_{i-1} \to \ldots \to K_1 \to K_0 \times_M M' \to M' \to 0,$$

а также в класс любой последовательности, включающейся в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & K'_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & K'_0 \arrow[r] \arrow[d] & M' \arrow[r] \arrow[d, "u"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & K_{i-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & K_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Опишите функториальность Ext по второму аргументу в терминах расширений.

Из определений видно, что $\operatorname{Ext}^i(M, N)$ – это морфизмы из проективной резольвенты $P_\bullet$ для M в комплекс $N[i]$ по модулю гомотопных нулю морфизмов. Пусть $K_\bullet$ – какая-то резольвента для $N[i]$. Как мы раньше показывали, морфизмы по модулю гомотопии из $P_\bullet$ в $N[i]$ и в $K_\bullet$ равны. В частности, верна

Лемма 4. *Имеется изоморфизм* $\operatorname{Ext}^i(M, N) \cong \operatorname{Hom}(P_\bullet(M), P_\bullet(N)[i])/_\sim$, *где* $P_\bullet(M)$ *и* $P_\bullet(N)$ *– проективные резольвенты для* M *и* N *соответственно.*

Такое описание позволяет определить ассоциативное умножение

$$\mathrm{Ext}^j(N,L)\times\mathrm{Ext}^i(M,N)\to\mathrm{Ext}^{i+j}(M,L):$$

если $\alpha\colon P_\bullet(M)\to P_\bullet(N)[i]$ и $\beta\colon P_\bullet(N)\to P_\bullet(L)[j]$, то $\beta\alpha\colon P_\bullet(M)\to P_\bullet(L)[i+j]$ определим как $\beta[i]\circ\alpha$.

Это же умножение удобно описывать по Йонеде.

Пусть элементы $\alpha\in\mathrm{Ext}^i(M,N)$ и $\beta\in\mathrm{Ext}^j(N,L)$ заданы точными последовательностями $0\to N\to K_{i-1}\to\ldots\to K_0\to M\to 0$ и $0\to L\to K'_{j-1}\to\ldots\to K'_0\to N\to 0$. Определим произведение $\beta*\alpha\in\mathrm{Ext}^{i+j}(M,L)$ как класс склеенной последовательности $0\to L\to K'_{j-1}\to\ldots\to K'_0\to K_{i-1}\to\ldots\to K_0\to M\to 0$.

Задача 12. a) Проверьте, что $\beta*\alpha=(-1)^{ij}\beta\alpha$.

b) Проверьте, что любой элемент в Ext^i можно представить как произведение элементов из Ext^1.

Теперь докажем, что определения групп Ext как производных функторов по первому и по второму аргументу эквивалентны. Для этого определим Ext как производный функтор по двум аргументам сразу. Сперва введём бикомплексы и свёртки.

Бикомплексом называется набор модулей $K^{ij}, i,j\in\mathbb{Z}$ и гомоморфизмов $d_I^{ij}\colon K^{ij}\to K^{i+1,j}$ и $d_{II}^{ij}\colon K^{ij}\to K^{i,j+1}$ таких, что $(d_I)^2=0$, $(d_{II})^2=0$ и $d_Id_{II}=d_{II}d_I$. Иначе говоря, бикомплекс – это комплекс комплексов.

Свёртка бикомплекса – это комплекс $Tot^\bullet(K^{\bullet\bullet})$, у которого $Tot^n=\oplus_{i+j=n}K^{ij}$, $d^n(x)=d_I^{ij}(x)+(-1)^i d_{II}^{ij}(x)$ при $x\in K^{ij}$.

Пример. Рассмотрим морфизм комплексов как бикомплекс с -1-м и 0-м столбцами. Тогда его свёртка – в точности конус морфизма.

Пусть $P_\bullet$ – проективная резольвента модуля M, а $I^\bullet$ – инъективная резольвента для N. Определим $\mathrm{Ext}^i_{I,II}(M,N)$ как когомологии свёртки $Tot(\mathrm{Hom}(P_\bullet,I^\bullet))$. Обычным образом устанавливается функториальность по обоим аргументам.

Теперь покажем, что $\mathrm{Ext}_{I,II}\cong\mathrm{Ext}_{II}$. Пусть $\widetilde{P}_\bullet$ – аугментированная резольвента (с (-1)-м членом M). Тогда в бикомплексе $\mathrm{Hom}(\widetilde{P}_\bullet,I^\bullet)$ строки точны (т.к. $\mathrm{Hom}(-,I^j)$ точен), а значит по следующей лемме и его свёртка точна. Но у бикомплекса $\mathrm{Hom}(\widetilde{P}_\bullet,I^\bullet)$ есть подбикомплекс $\mathrm{Hom}(P_\bullet,I^\bullet)$, фактор по которому изоморфен $\mathrm{Hom}(M,I^\bullet)$ (сдвинутому). Переходя к свёрткам, получаем точную тройку комплексов $0\to Tot(\mathrm{Hom}(P_\bullet,I^\bullet))\to Tot(\mathrm{Hom}(\widetilde{P}_\bullet,I^\bullet))\to\mathrm{Hom}(M,I^\bullet[1])\to 0$. Длинная точная последовательность когомологий устанавливает нужные изоморфизмы.

Лемма 5. *Пусть у бикомплекса, лежащего в 1-й четверти, все строки (или столбцы) точны. Тогда свёртка этого бикомплекса точна.*

Внимательный слушатель, конечно, заметил, что приведённое рассуждение, по сути, может быть выражено одной строчкой:

$$\mathrm{Ext}^i_I(M,N)=\mathrm{Hom}(P_\bullet(M),N[i])/_\sim=\mathrm{Hom}(P_\bullet(M),I^\bullet(N)[i])/_\sim=$$
$$=\mathrm{Hom}(M,I^\bullet(N)[i])/_\sim=\mathrm{Ext}^i_{II}(M,N).$$

Однако оно хорошо тем, что работает в более общей ситуации – например, для функторов Tor.