8.10.2010
Листок 5

Функторы Tor

Сегодня мы рассмотрим ещё один пример производных функторов – функторы Tor.

Функтор Tor – это производный от функтора тензорного умножения. Тензорное умножение над кольцом A – это ковариантный по двум аргументам функтор $(\mathrm{mod}-A)\times(A-\mathrm{mod}) \to \mathcal{A}b$, точный справа по каждому из аргументов. Можно определить производный функтор по первому или по второму аргументу, или же по двум аргументам сразу – на прошлой лекции мы проверили, что получатся изоморфные бифункторы. Они обозначаются $\mathrm{Tor}_i^A(M,N)$. Если кольцо A коммутативно, то тензорное произведение коммутативно, а значит, и $\mathrm{Tor}_i^A(M,N) = \mathrm{Tor}_i^A(N,M)$ (изоморфизм бифункторов).

Пример. Посчитаем $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Умножим резольвенту $\mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z}$ модуля $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ на $\mathbb{Z}/nZ$, получим $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Вычисляя когомологии, получаем: $\mathrm{Tor}_0(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/(m,n)\mathbb{Z}$, $\mathrm{Tor}_1(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/(m,n)\mathbb{Z}$.

Задача 1. Посчитайте $\mathrm{Tor}_i^A(\mathsf{k},\mathsf{k})$, где $A = \mathsf{k}[x_1,\ldots,x_n] = \mathsf{k}[V]$, а k – тривиальный модуль.

Задача 2. a) Проверьте, что тензорное умножение коммутирует с прямыми суммами.

b) Проверьте, что Tor_i коммутируют с прямыми суммами.

c) Верно ли это для прямых произведений?

Гомологии Хохшильда. Пусть A – алгебра над коммутативным кольцом k, свободная как k-модуль. Рассмотрим функтор из $A\otimes_{\mathsf{k}} A^{op}-\mathrm{mod}$ в $\mathsf{k}-\mathrm{mod}$:

$$M \mapsto M/(am - ma)_{m\in M, a\in A}.$$

Он точен справа, его левые производные функторы называются *гомологиями Хохшильда алгебры (с коэффициентами в модуле)* и обозначаются $HH_i(A,M)$. Для их вычисления полезно заметить, что описанный функтор – это на самом деле тензорное умножение над $A\otimes_{\mathsf{k}} A^{op}$ на бимодуль A. Поэтому искомые производные функторы суть $\mathrm{Tor}_i^{A\otimes_{\mathsf{k}} A^{op}}(A,M)$, и для их вычисления можно использовать Bar-резольвенту.

Задача 3. Выпишите явно комплекс, вычисляющий гомологии Хохшильда при помощи Bar-резольвенты.

Гомологии групп. Пусть G – группа. Рассмотрим функтор коинвариантов из категории G-модулей в $\mathcal{A}b$:

$$M \mapsto M_G = M/gm = m_{g\in G, m\in M}.$$

Он точен справа, его левые производные функторы называются *гомологиями группы (с коэффициентами в модуле)* и обозначаются $H_i(G,M)$. Для его вычисления можно заметить, что $M_G = \mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}[G]} M$, где $\mathbb{Z}$ обозначает тривиальный правый $\mathbb{Z}[G]$-модуль. Поэтому $H_i(G,M) = \mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},M)$.

Задача 4. a) При помощи комплекса Кошуля постройте свободную резольвенту правого $\mathbb{Z}[G]$-модуля $\mathbb{Z}$ (на самом деле, мы её построили в прошлый раз). b) Выпишите явно комплекс, вычисляющий гомологии G с коэффициентами в M.

Правый модуль M над A называется *плоским*, если функтор $M\otimes_A -$ точен, аналогично для левого модуля (в случае коммутативного кольца, естественно, разницы нет).

Примеры. Любой свободный модуль плоский. Далее, плоскость прямой суммы $\oplus_\alpha P_\alpha$ равносильна плоскости каждого P_α. Поэтому любой проективный модуль плоский. Поле частных коммутативного целостного кольца A – плоский A-модуль. Вообще, локализация A_S кольца A по мультипликативной системе S – плоский A-модуль (т.к. функтор локализации точен).

Задача 5. Проверьте эквивалентность следующих условий на модуль M над A:

1. M плоский;
2. $\mathrm{Tor}_1(N, M) = 0$ при всех $i > 0$ и N;
3. $\mathrm{Tor}_1(A/I, M) = 0$ для любого правого идеала $I \subset A$;
4. если $0 \to N' \to N$ – вложение, то $0 \to N' \otimes M \to N \otimes M$ – вложение;
5. для любого правого идеала $I \subset A$ гомоморфизм $I \otimes M \to M$ инъективен.

Название Tor означает torsion – кручение. Действительно, Tor позволяет описывать кручение в модулях. Пусть A – коммутативное целостное кольцо, M – A-модуль, $a \in A$ – элемент. *a-кручением в M* называется подмодуль $\mathrm{Tors}_a(M) = \{m \mid \exists n \in \mathbb{N}\ a^n m = 0\} \subset M$. *Кручением M* называется объединение $\mathrm{Tors}(M) = \cup_{a \neq 0} \mathrm{Tors}_a(M)$ (проверьте, что это подмодуль). Рассмотрим локализацию $A[a^{-1}]$ и точную последовательность

$$0 \to A \to A[a^{-1}] \to A[a^{-1}]/A \to 0.$$

Умножая её тензорно на произвольный модуль M, получим длинную точную последовательность Tor'ов:

$$\ldots \mathrm{Tor}_1(A[a^{-1}], M) \to \mathrm{Tor}_1(A[a^{-1}]/A, M) \to A \otimes_A M \to A[a^{-1}] \otimes M \ldots$$

В ней $\mathrm{Tor}_1(A[a^{-1}], M) = 0$ т.к. $A[a^{-1}]$ – плоский A-модуль, поэтому имеем

$$\mathrm{Tor}_1(A[a^{-1}]/A, M) = \ker(M \to M[a^{-1}]) = \mathrm{Tors}_a(M).$$

Задача 6. Получите аналогичное выражение для $\mathrm{Tors}(M)$.
Задача 7. Проверьте, что $\mathbb{Q}$ – пример плоского не проективного $\mathbb{Z}$-модуля.

Если же говорить о конечно порождённых модулях над коммутативным кольцом, то плоские модули весьма близки к проективным. И те, и другие хорошо описываются в локальных терминах.

Действительно, плоскость – это локальное свойство.

Лемма 1. *Модуль M над коммутативным кольцом A плоский $\Leftrightarrow$ для любого простого идеала $\mathfrak{p} \subset A$ модуль $M_\mathfrak{p}$ – плоский над $A_\mathfrak{p}$.*

Доказательство. $\Rightarrow$ очевидно, докажем $\Leftarrow$. Пусть $0 \to K \to L$ – вложение, $Z = \ker(M \otimes K \to M \otimes L)$. Тогда $Z_\mathfrak{p} = 0$ для всех простых идеалов $\mathfrak{p}$. Но если $Z \neq 0$, то для $z \neq 0$ существует $\mathfrak{p}$ такой, что $Ann(z) \subset \mathfrak{p}$. Значит, $Z_\mathfrak{p} \neq 0$, противоречие. $\square$

Проективность модуля над кольцом тоже можно проверять локально.

Лемма 2. *Конечно представимый модуль P над коммутативным кольцом A проективен $\Leftrightarrow$ модуль $P_\mathfrak{p}$ проективен над $A_\mathfrak{p}$ для любого простого идеала $\mathfrak{p} \subset A$.*

Доказательство. Если A коммутативно, то функтор $\mathrm{Hom}_A(P, -)$ принимает значения в категории A-модулей, а не просто абелевых групп, этим мы и воспользуемся. Как мы видели выше, точность последовательности $0 \to \mathrm{Hom}(P, M) \to \mathrm{Hom}(P, L) \to \mathrm{Hom}(P, K)$ равносильна точности её локализации $0 \to \mathrm{Hom}(P, M)_\mathfrak{p} \to \mathrm{Hom}(P, L)_\mathfrak{p} \to \mathrm{Hom}(P, K)_\mathfrak{p}$ по любому простому идеалу $\mathfrak{p}$. Заменяя $\mathrm{Hom}_A(P, -)_\mathfrak{p}$ на $\mathrm{Hom}_{A_\mathfrak{p}}(P_\mathfrak{p}, -_\mathfrak{p})$ при помощи следующей задачи, получаем условие, равносильное проективности всех $P_\mathfrak{p}$. $\square$

Задача 8. Пусть A и B – коммутативные кольца, B плоско над A, M – конечно представимый A-модуль, N – ещё один A-модуль. Тогда естественное отображение

$$B \otimes \operatorname{Hom}_A(M, N) \to \operatorname{Hom}_B(B \otimes_A M, B \otimes_A N)$$

– изоморфизм.

А для локальных колец вообще всё устроено просто.

Лемма 3. *Пусть A – нётерово локальное кольцо, k – его поле вычетов. Тогда следующие условия на конечно порождённый модуль M эквивалентны:*

1. *M свободный;*
2. *M проективный;*
3. *M плоский;*
4. $\operatorname{Tor}_1(M, \mathsf{k}) = 0$.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$ очевидно. Докажем $4 \Rightarrow 1$. Пусть $\mathfrak{p} \subset A$ – максимальный идеал. Выберем $\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_n$ – базис k-векторного пространства $M/\mathfrak{p}M = M \otimes \mathsf{k}$. Покажем, что гомоморфизм $f\colon A^{\oplus n} \to M$, переводящий e_i в m_i – изоморфизм. Во-первых, функтор $- \otimes \mathsf{k}$ точен справа, поэтому $(\operatorname{coker} f) \otimes \mathsf{k} = \operatorname{coker}(\mathsf{k}^{\oplus n} \to M/\mathfrak{p}M) = 0$. Значит, по лемме Накаямы $\operatorname{coker} f = 0$. Теперь напишем длинную точную последовательность производных функторов

$$0 = \operatorname{Tor}_1(M, \mathsf{k}) \to (\ker f) \otimes \mathsf{k} \to \mathsf{k}^{\oplus n} \to M/\mathfrak{p}M,$$

из которой видим, что $(\ker f) \otimes \mathsf{k} = 0$ и снова по лемме Накаямы $\ker f = 0$. ☐

Итак, мы доказали

Предложение 4. *Конечно порождённый модуль над коммутативным нётеровым кольцом плоский $\Leftrightarrow$ проективный.*

Геометрически плоскость означает локальную тривиальность. Т.е. конечно порождённый плоский пучок на многообразии – это векторное расслоение. Связь между локальной и глобальной тривиальностью модуля очень непроста. Пример – следующая

Теорема 5 (Суслин, Квиллен, 1976). *Всякий конечно порождённый проективный модуль над кольцом $\mathsf{k}[x_1, \dots, x_n]$, где k – поле, свободен.*

А вот проективность при работе с не обязательно аффинными многообразиями перестаёт быть локальным свойством – так, на проективных многообразиях вообще не бывает нетривиальных проективных объектов в категории пучков.

В алгебраической геометрии нужно уметь правильно определять кратность пересечения многообразий в точке (например, для формулировки теорему Безу). Пусть X и Y – подмногообразия в $\mathbb{A}^n$, 0 – их изолированная точка пересечения. Естественно пытаться определить кратность пересечения X и Y в 0 как $\dim_{\mathsf{k}} A/(I+J)$, где $A = \mathsf{k}[x_1, \dots, x_n]_{(0)}$ – локализация кольца многочленов в нуле, а I и J – идеалы, задающие X и Y соответственно. Такое определение работает хорошо, если X и Y – кривые на плоскости, или если X и Y гладкие в 0. В общем случае, однако, оно не всегда даёт правильный результат.

Например, пусть X – пара двумерных плоскостей $x = y = 0$ и $z = t = 0$ в $\mathbb{A}^4$, а Y – двумерная плоскость $x - z = y - t = 0$. Тогда $\dim_{\mathsf{k}} A/(I+J) = 3$, в то время как ожидаемый ответ – 2.

Следующая формула, предложенная Серром, добавляет к

$$\dim_{\mathsf{k}} A/(I+J) = \dim_{\mathsf{k}} A/I \otimes A/J$$

члены, исправляющие этот недостаток:

$$\#(X \cdot Y) = \sum_{i \geqslant 0} (-1)^i \dim_{\mathsf{k}} \mathrm{Tor}_i^A(A/I, A/J).$$

Задача 9. a) Проверьте, что $\mathrm{Tor}_i^A(A/I, A/J)$ – конечномерное векторное пространство.
b) Проверьте, что в приведённом выше примере $\#(X \cdot Y) = 2$.

Две лекции назад мы определили инъективные модули над кольцом. Сейчас мы их изучим и докажем, что инъективных модулей достаточно много.

Также, как и среди проективных модулей есть самые главные – это свободные, так и среди инъективных тоже есть самые главные – это косвободные. Однако устроены они не так просто. Изучим сначала случай $\mathbb{Z}$-модулей, т.е. абелевых групп.

Предложение 6 (критерий инъективности Бэра). *Модуль I над кольцом A инъективен $\Leftrightarrow$ для любого левого идеала $J \subset A$ любой гомоморфизм $f\colon J \to I$ продолжается на A.*

Доказательство. Нужно показать, что в любой диаграмме

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[dl, dashed] \\ & I & \end{tikzcd}$$

существует пунктирная стрелка, замыкающая диаграмму. Идея проста: постепенно продолжать гомоморфизм в I на всё большие подмодули в L. Шаг индукции такой: нужно продолжить $f\colon N \to I$ на подмодуль $N' = \langle N, n\rangle$, порождённый над N одним элементом. Для этого рассмотрим расслоенную (и одновременно корасслоенную) диаграмму

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "n"] \\ N \arrow[r] & N', \end{tikzcd}$$

где $J = N \times_{N'} A$. Тогда ограничение $f\mid_J$ продолжается на A по условию, и склеивается с f до гомоморфизма, определённого на N'. Чтобы получить доказательство, надо воспользоваться трансфинитной индукцией или леммой Цорна: например, рассмотреть упорядоченное множество продолжений гомоморфизма f с N на разные подмодули в L. $\square$

Следствие 7. *Пусть A – целостное кольцо главных левых идеалов. Тогда модуль I над A инъективен тогда и только тогда, когда он делим, т.е. $\forall x \in I\ \forall a \neq 0 \in A\ \exists x \in I\ ay = x$.*

Примеры: $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ – инъективные $\mathbb{Z}$-модули.

Лемма 8. *В категории $\mathbb{Z}$-модулей достаточно много инъективных.*

Доказательство. Вложим заданный модуль M в инъективный. Конструкция в точности двойственная той, что применялась для накрытия произвольного модуля свободным. Рассмотрим естественное отображение $M \to \prod_{f \in \mathrm{Hom}(M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\colon\ m \mapsto (f(m))_f$. Чтобы показать его мономорфность, проверим, что $\forall m \in M\ \exists f \in \mathrm{Hom}(M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ такой, что $f(m) \neq 0$. Пусть циклическая подгруппа в M, порождённая m, состоит из n элементов. Тогда положим $f(m) = 1/n$ и продолжим как-нибудь f с $\langle m \rangle$ на весь M. Если же подгруппа $\langle m \rangle$ свободна, то положим $f(m) = \frac{1}{2010}$ и тоже продолжим. Осталось вспомнить, что прямое произведение любого числа инъективных модулей инъективно. $\square$

Абелевы группы вида $\prod \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ называют косвободными. Косвободные модули над произвольным кольцом получаются из косвободных абелевых групп аналогично тому, как свободные – из свободных абелевых групп.

Пусть $A \to B$ – гомоморфизм колец. Напомним, что у функтора забывания из B-модулей в A-модули есть сопряженный слева функтор $B \otimes_A -$ и сопряжённый справа функтор $\mathrm{Hom}_A(B, -)$. B-модули вида $B \otimes_A N$, где N – A-модуль, называются *индуцированными*, а модули вида $\mathrm{Hom}_A(B, N)$ – *коиндуцированными.*

Задача 10. Проверьте, что модули, индуцированные с проективных, проективны, а коиндуцированные с инъективных – инъективны.

Как мы знаем, свободным A-модулем называется модуль, индуцированный со свободного $\mathbb{Z}$-модуля, т.е. модуль вида $A \otimes_{\mathbb{Z}} (\oplus\mathbb{Z})$. Двойственным образом, косвободным модулем называется модуль, коиндуцированный с косвободного $\mathbb{Z}$-модуля, т.е. модуль вида $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \prod(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}))$.

Докажем наконец

Предложение 9. *Любой A-модуль M вкладывается в инъективный.*

Доказательство. Вложим M как абелеву группу в инъективный $\mathbb{Z}$-модуль I, например, в $\prod_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. По сопряжённости, вложению $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, I)$ отвечает гомоморфизм A-модулей $\bar{g} \in \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, I))$, который имеет вид композиции

$$M \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, I).$$

Здесь первая стрелка – единица сопряжения (её инъективность проверяется непосредственно), а вторая порождена g (и инъективна, так как $\mathrm{Hom}(A,)$ точен слева). $\square$