Триангулированные категории

Гомотопическая и производная категории от абелевой категории, как правило, абелевыми уже не будут – в них слишком мало инъективных и проективных морфизмов, поэтому ядра и коядра редко существуют.

Задача 1. a) Пусть $f\colon A \to B$ – инъективный морфизм в абелевой категории $\mathcal{A}$. Покажите, что f инъективен в $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ и $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ тогда и только тогда, когда f – вложение прямого слагаемого. b) Покажите, что категории $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ и $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ абелевы тогда и только тогда, когда категория $\mathcal{A}$ полупроста.

Таким образом, в гомотопической и производной категории нет естественного понятия точной тройки. Его заменой служит понятие выделенного треугольника. А аксиоматизация свойств таких треугольников приводит к определению триангулированной категории (хотя исторически триангулированные категории появились совсем в другом контексте, в топологии).

По определению, треугольник – это диаграмма комплексов $K^\bullet \to L^\bullet \to M^\bullet \to K[1]^\bullet$, морфизм треугольников – коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
K^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "u"] & L^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "v"] & M^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "w"] & K[1]^\bullet \arrow[d, "u[1]"] \\
K'^\bullet \arrow[r] & L'^\bullet \arrow[r] & M'^\bullet \arrow[r] & K'[1]^\bullet.
\end{tikzcd}$$

Выделенный треугольник в гомотопической категории – это треугольник, изоморфный треугольнику вида $K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \to C(f)^\bullet \to K[1]^\bullet$, связанному с морфизмом комплексов $f\colon K^\bullet \to L^\bullet$. Установим несколько свойств выделенных треугольников в гомотопической категории.

Задача 2. Пусть $K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \xrightarrow{g} M^\bullet \xrightarrow{h} K[1]^\bullet$ – выделенный треугольник. Проверьте, что треугольники

$$K^\bullet \xrightarrow{-f} L^\bullet \xrightarrow{-g} M^\bullet \xrightarrow{h} K[1]^\bullet, \qquad K^\bullet \xrightarrow{-f} L^\bullet \xrightarrow{g} M^\bullet \xrightarrow{-h} K[1]^\bullet,$$
$$K[1]^\bullet \xrightarrow{-f[1]} L[1]^\bullet \xrightarrow{-g[1]} M[1]^\bullet \xrightarrow{-h[1]} K[2]^\bullet$$

выделены.

Пусть $f\colon K^\bullet \to L^\bullet$ – морфизм комплексов. Рассмотрим диаграмму $K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \xrightarrow{u} C(f)^\bullet \xrightarrow{v} K[1]^\bullet$, где $u\colon L^\bullet \to K[1]^\bullet \oplus L^\bullet$ и $v\colon K[1]^\bullet \oplus L^\bullet \to K[1]^\bullet$ – канонические морфизмы: $u(l) = (0, l), v(k, l) = k$. Определим *цилиндр* f как комплекс $Cyl(f) = C(-v[-1])$, где $-v[-1]\colon C(f)[-1]^\bullet \to K^\bullet$. Более явно цилиндр определяется так:

$$Cyl(f)^n = K^{n+1} \oplus L^n \oplus K^n, \qquad d_{Cyl}(k^{n+1}, l^n, k^n) = (-dk^{n+1}, dl^n + f(k^{n+1}), dk^n - k^{n+1}).$$

Лемма 1. *Треугольник $K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \xrightarrow{u} C(f)^\bullet \xrightarrow{v} K[1]^\bullet$ изоморфен в гомотопической категории треугольнику $K^\bullet \xrightarrow{f'} Cyl(f)^\bullet \xrightarrow{u'} C(f)^\bullet \xrightarrow{v} K[1]^\bullet$.*

Доказательство. Определим отображения

$$\alpha\colon L^\bullet \to Cyl(f)^\bullet, \qquad \alpha(l) = (0, l, 0)$$

$$\beta\colon Cyl(f)^\bullet \to L^\bullet, \qquad \beta(k, l, k') = l + f(k').$$

Проверки показывают, что: α и β – морфизмы комплексов, $\beta f' = f$, $u'\alpha = u$, $\beta\alpha = 1_{L^\bullet}$. Кроме того, $\alpha\beta$ гомотопно $1_{Cyl(f)^\bullet}$, гомотопии задаются формулой $h(k,l,k') = (k',0,0)$. Действительно,

$$\alpha\beta(k,l,k') = (0, l + f(k'), 0), \qquad (\alpha\beta - 1)(k,l,k') = (-k, f(k'), -k'),$$
$$hd(k,l,k') = (dk' - k, 0, 0), \qquad dh(k,l,k') = (-dk', f(k'), -k'),$$
$$(hd + dh)(k,l,k') = (-k, f(k'), -k').$$

Следовательно, α и β – изоморфизмы в $\mathrm{K}(\mathcal{A})$, отсюда же следует, что в гомотопической категории $\alpha f = f'$ и $u\beta = u'$. Значит, треугольники из условия изоморфны в $\mathrm{K}(\mathcal{A})$. $\square$

Следствие 2. *Треугольник*

$$K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \xrightarrow{g} M^\bullet \xrightarrow{h} K[1]^\bullet \tag{1}$$

выделен тогда и только тогда, когда выделен треугольник

$$L^\bullet \xrightarrow{g} M^\bullet \xrightarrow{h} K[1]^\bullet \xrightarrow{-f[1]} L[1]^\bullet. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть треугольник (2) выделен, тогда он изоморфен треугольнику $X^\bullet \xrightarrow{p} Y^\bullet \xrightarrow{q} C(p)^\bullet \xrightarrow{r} X[1]^\bullet$, который изоморфен $X^\bullet \xrightarrow{p'} Cyl(p)^\bullet \xrightarrow{q'} C(p)^\bullet \xrightarrow{r} X[1]^\bullet$ по лемме 1. А треугольник (1) тогда изоморфен треугольнику $C(p)[-1]^\bullet \xrightarrow{-r[-1]} X^\bullet \xrightarrow{p'} Cyl(p)^\bullet \xrightarrow{q'} C(p)^\bullet$. Этот треугольник – стандартный по определению цилиндра, значит (1) – выделенный.

Обратно, пусть (1) выделенный. Тогда по доказанному, выделенными будут треугольники $M[-1]^\bullet \xrightarrow{-h[-1]} K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \xrightarrow{g} M^\bullet$ и $L[-1]^\bullet \xrightarrow{-g[-1]} M[-1]^\bullet \xrightarrow{-h[-1]} K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet$. Согласно задаче 2, треугольник (2) тоже выделенный. $\square$

Можно определять выделенные треугольники несколько иначе.

Задача 3. a) Точная тройка комплексов

$$0 \to K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \xrightarrow{g} M^\bullet \to 0. \tag{3}$$

почленно расщепима $\Leftrightarrow$ изоморфна тройке $0 \to K^\bullet \to C(h)^\bullet \to M^\bullet \to 0$, где морфизм $h\colon M[-1]^\bullet \to K^\bullet$ задаётся формулой $h = f^{-1} d_L g^{-1}$.

b) Пусть тройка (3) почленно расщепима. Дополним её до треугольника при помощи морфизма $-h[1]\colon M^\bullet \to K[1]^\bullet$. Покажите, что полученный треугольник $K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \xrightarrow{g} M^\bullet \xrightarrow{h} K[1]^\bullet$ выделенный и все выделенные треугольники изоморфны треугольнику такого вида.

Теперь докажем факт ("лемма 5"), использовавшийся ранее при доказательстве того, что производная категория – локализация гомотопической:

Лемма 3. *Пусть f и $g\colon K^\bullet \to L^\bullet$ – два гомотопные морфизма комплексов, а $Q\colon \mathrm{Kom}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{A})$ – функтор локализации. Тогда $Q(f) = Q(g)$.*

Доказательство. Пусть $f = g + dh + hd$. Определим морфизм $C(h)\colon C(f)^\bullet \to C(g)^\bullet$ формулой $\alpha(k,l) = (k, l + h(k))$. Легко видеть, что это изоморфизм комплексов. Причём имеется диаграмма

$$\begin{tikzcd}
K^\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & L^\bullet \arrow[r, "u_f"] \arrow[d, equal] & C(f)^\bullet \arrow[r, "v_f"] \arrow[d, "C(h)"] & K[1]^\bullet \arrow[d, equal] \\
K^\bullet \arrow[r, "g"] & L^\bullet \arrow[r, "u_g"] & C(g)^\bullet \arrow[r, "v_g"] & K[1]^\bullet,
\end{tikzcd}$$

в которой два правых квадрата коммутативны в $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$. Это позволяет построить коммутативную в $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ диаграмму

$$\begin{tikzcd}
K^\bullet \arrow[r] \arrow[d, equal] & Cyl(f)^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "Cyl(h)"] & C(f)^\bullet \arrow[r, "v_f"] \arrow[d, "C(h)"] & K[1]^\bullet \arrow[d, equal] \\
K^\bullet \arrow[r] & Cyl(g)^\bullet \arrow[r] & C(g)^\bullet \arrow[r, "v_g"] & K[1]^\bullet,
\end{tikzcd}$$

где $Cyl(h)(k,l,k') = (k, l + h(k), k')$. Согласно лемме 1, эта диаграмма квазиизоморфна предыдущей, откуда и следует равенство $Q(f) = Q(g)$. $\square$

Выделенные треугольники играют в гомотопической категории ту же роль, что в категории комплексов играют точные тройки комплексов. А именно, по выделенному треугольнику строится длинная точная последовательность когомологий.

Предложение 4. *Пусть*

$$K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \xrightarrow{g} M^\bullet \xrightarrow{h} K[1]^\bullet$$

– выделенный треугольник в $\mathrm{K}(\mathcal{A})$*. Тогда длинная последовательность*

$$\ldots \to H^i(K^\bullet) \to H^i(L^\bullet) \to H^i(M^\bullet) \xrightarrow{H^i(h)} H^i(K[1]^\bullet) = H^{i+1}(K^\bullet) \to H^{i+1}(L^\bullet) \to \ldots$$

точна.

Доказательство. Изоморфным треугольникам соответствуют изоморфные длинные последовательности. Поэтому достаточно доказать точность для стандартного треугольника $K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \xrightarrow{g} M^\bullet \xrightarrow{h} K[1]^\bullet$, где $h = -f^{-1}d_L g^{-1}$, связанного с расщепимой точной тройкой. Граничные отображения $H^i(M^\bullet) \to H^{i+1}(K^\bullet)$ с точностью до знака совпадают с отображениями, индуцированными морфизмом $M^\bullet \xrightarrow{h} K[1]^\bullet$, поэтому длинная последовательность совпадает с точностью до знаков с той, точность которой была доказана на первой лекции. $\square$

Предложение 5. *Пусть*

$$K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \xrightarrow{g} M^\bullet \xrightarrow{h} K[1]^\bullet$$

– выделенный треугольник в $\mathrm{K}(\mathcal{A})$*. Тогда длинная последовательность*

$$\begin{aligned}\ldots \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, K[i]^\bullet) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, L[i]^\bullet) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, M[i]^\bullet) \xrightarrow{h\circ -} \\ \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, K[i+1]^\bullet) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, L[i+1]^\bullet) \to \ldots\end{aligned}$$

точна.

Для стандартных выделенных треугольников мы уже доказывали это утверждение, а общий случай сводится к случаю стандартного треугольника. Ниже мы получим ещё одно доказательство, работающее в общем контексте триангулированной категории.

Пусть на категории $\mathcal{T}$ задан автоморфизм $[1]\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ (более правильно говорить "автоэквивалентность", но в случае категории комплексов это в действительности автоморфизм, что упрощает формулировки). *Треугольником* в $\mathcal{T}$ называется диаграмма вида $X \to Y \to Z \to X[1]$. *Триангулированной категорией* называется категория $\mathcal{T}$ с автоморфизмом $[1]$ (он называется *функтором сдвига*), в которой выделен класс треугольников, удовлетворяющий следующим аксиомам:

TR1. (a) Треугольник $X \xrightarrow{1_X} X \to 0 \to X[1]$ выделен;

(b) Треугольник, изоморфный выделенному, выделен;

(c) Любой морфизм $f\colon X \to Y$ можно дополнить до выделенного треугольника $X \xrightarrow{f} Y \to Z \to X[1]$.

TR2. Треугольник $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ выделен тогда и только тогда, когда выделен треугольник $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \xrightarrow{-f[1]} Y[1]$.

TR3. Пусть строки диаграммы

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, dashed, "w"] & X[1] \arrow[d, "u[1]"] \\
X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r, "h'"] & X'[1].
\end{tikzcd}$$

– выделенные треугольники, и заданы морфизмы u и v такие, что $vf = f'u$. Тогда существует морфизм w, делающий диаграмму коммутативной.

TR4. Любая диаграмма

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[dr, "g"] & \\
X \arrow[ur, "f"] & & Z
\end{tikzcd}$$

дополняется до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
Z' \arrow[dr, "1"] \arrow[ddrr, bend right] & & Y \arrow[ll] \arrow[dr, "g"] & & X' \arrow[ll, "1"'] \arrow[llll, bend right, "1"'] \\
& X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "gf"] & & Z \arrow[ur] \arrow[dl] & \\
& & Y', \arrow[ul, "1"] \arrow[uurr, bend right] & &
\end{tikzcd}$$

в которой стрелка с пометкой 1 из A в B обозначает морфизм из A в $B[1]$, а треугольники с вершинами $(X, Y, Z'), (Y, Z, X'), (X, Z, Y')$ и (Z', Y', X') – выделенные.

Сделаем несколько замечаний относительно аксиом.

Объект Z из аксиомы TR1c, дополняющий морфизм f до выделенного треугольника, естественно назвать конусом f. Как мы ниже увидим, конус определён однозначно с точностью до изоморфизма. Аксиома TR3 утверждает, что морфизму в категории стрелок соответствует морфизм конусов этих стрелок. Однако, из аксиом не следует, что это соответствие является функтором – морфизм между конусами в аксиоме TR3 определён не однозначно. Это обстоятельство – один из недостатков аксиоматики триангулированных категорий.

Из аксиомы TR2 следует, что по всякому треугольнику $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ можно построить бесконечную последовательность

$$\ldots \to Z[-1] \xrightarrow{-h[-1]} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \xrightarrow{-f[1]} Y[1] \xrightarrow{-g[1]} Z[1] \xrightarrow{-h[1]} X[2] \xrightarrow{f[2]} \ldots,$$

в которой любой фрагмент длины 3 – выделенный треугольник. Тем самым, вершины треугольника равноправны.

Аксиома TR4 называется аксиомой октаэдра. Несмотря на кажущуюся громоздкость, её смысл можно выразить одной фразой:
конус композиции морфизмов есть конус морфизма между конусами этих морфизмов. Диаграмма октаэдра из формулировки этой аксиомы строится автоматически, за исключением двух стрелок $Z' \to Y'$ и $Y' \to X'$, свойства которых и постулируются.

Некоторые свойства выделенных треугольников собраны в следующем предложении.

Предложение 6. *Пусть $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ – выделенный треугольник. Тогда*

1. *Композиции $gf, hg, f[1]h$ равны нулю.*
2. *Если U – произвольный объект, то имеются точные последовательности*
$$\ldots \to \mathrm{Hom}(U, Z[-1]) \to \mathrm{Hom}(U, X) \to \mathrm{Hom}(U, Y) \to \mathrm{Hom}(U, Z) \to \mathrm{Hom}(U, X[1]) \to \ldots$$
и
$$\mathrm{Hom}(X[1], U) \to \mathrm{Hom}(Z, U) \to \mathrm{Hom}(Y, U) \to \mathrm{Hom}(X, U) \to \mathrm{Hom}(Z[-1], U) \to \ldots$$
3. *Если в аксиоме TR3 морфизмы u и v – изоморфизмы, то и w – изоморфизм. Как следствие, любые два дополнения морфизма до выделенного треугольника изоморфны.*

Доказательство. 1. Согласно аксиоме TR2, достаточно проверить, что $gf = 0$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "1_X"] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & X[1] \arrow[d, "1_X[1]"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "h"] & X[1]. \end{tikzcd}$$

По аксиоме TR3 существует морфизм $0 \to Z$ (нулевой), делающий её коммутативной. Это и значит, что $gf = 0$.

2. Проверим точность первой последовательности, из пункта 1 следует, что она – комплекс. Докажем, что он точен, согласно TR2, достаточно рассмотреть средний член. Пусть $u \colon U \to Y$ и $gu = 0$. Снова рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "1_U"] \arrow[d, dashed, "v"] & U \arrow[r] \arrow[d, "u"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & U[1] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "h"] & X[1]. \end{tikzcd}$$

В ней средний квадрат коммутативен по предположению, значит по TR3 найдётся v, для которого коммутативен левый квадрат, т.е. $u = fv$.

3. По лемме Йонеды, достаточно показать, что w индуцирует изоморфизмы на $\mathrm{Hom}(U, -)$ при всех U. Применим $\mathrm{Hom}(U, -)$ к диаграмме из TR3, получим диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(U,X) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & \mathrm{Hom}(U,Y) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & \mathrm{Hom}(U,Z) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "w"] & \mathrm{Hom}(U,X[1]) \arrow[r, "f[1]"] \arrow[d, "u[1]"] & \mathrm{Hom}(U,Y[1]) \arrow[d, "v[1]"] \\ \mathrm{Hom}(U,X') \arrow[r, "f'"] & \mathrm{Hom}(U,Y') \arrow[r, "g'"] & \mathrm{Hom}(U,Z') \arrow[r, "h'"] & \mathrm{Hom}(U,X'[1]) \arrow[r, "f[1]"] & \mathrm{Hom}(U,Y'[1]), \end{tikzcd}$$

в которой строки – точные последовательности по пункту 2, а все вертикальные стрелки, кроме средней, – изоморфизмы. Диаграммный поиск показывает, что и средняя стрелка будет изоморфизмом (этот факт носит название 5-леммы).

$\square$

Функтор Hom, образующий длинную точную последовательность при применении к выделенному треугольнику, – пример когомологического функтора.

Когомологическим функтором на триангулированной категории $\mathcal{T}$ называется аддитивный функтор $H\colon \mathcal{T} \to \mathcal{A}$ со значениями в абелевой категории такой, что для любого выделенного треугольника

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to X[1]$$

последовательность

$$H(X) \xrightarrow{H(f)} H(Y) \xrightarrow{H(g)} H(Z)$$

точна.

Из аксиомы TR2 следует, что когомологический функтор определяет по любому выделенному треугольнику длинную точную последовательность

$$\ldots \to H(Z[-1]) \to H(X) \to H(Y) \to H(Z) \to H(X[1]) \to \ldots$$

Ещё один известный нам пример когомологического функторов – функтор H^0 на гомотопической категории комплексов.

Теперь докажем основной факт сегодняшней лекции.

Предложение 7. *Пусть $\mathcal{A}$ – абелева категория, а $\mathrm{K}^*(\mathcal{A})$ – одна из версий гомотопической категории комплексов над $\mathcal{A}$. Тогда категория $\mathrm{K}^*(\mathcal{A})$ с определённым выше классом выделенных треугольников и обычным функтором сдвига комплексов триангулированна.*

Доказательство. Аксиома TR1a выполнена по определению выделенных треугольников, TR1c очевидна. TR1b следует из того, что треугольник $0 \to X \xrightarrow{1_X} X \to 0$ выделенный, и аксиомы TR2. Аксиому TR2 мы уже доказали. Аксиому TR3 достаточно проверить для стандартных выделенных треугольников. Т.е., необходимо по коммутативной в $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ диаграмме

$$\begin{tikzcd} K^\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & L^\bullet \arrow[d, "v"] \\ K'^\bullet \arrow[r, "f'"] & L'^\bullet \end{tikzcd}$$

построить диаграмму

$$\begin{tikzcd} K^\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & L^\bullet \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & C(f)^\bullet \arrow[r, "h"] \arrow[d, "w"] & K[1]^\bullet \arrow[d, "u[1]"] \\ K'^\bullet \arrow[r, "f'"] & L'^\bullet \arrow[r, "g'"] & C(f')^\bullet \arrow[r, "h'"] & K[1]^\bullet. \end{tikzcd}$$

Это легко сделать: пусть $vf = f'u + dh + hd$. Положим $w(k, l) = (u(k), v(l) + h(k))$. Проверка показывает, что w – морфизм комплексов и два правые квадрата коммутируют.

Проверим аксиому TR4. По паре морфизмов f и g строится диаграмма

$$\begin{tikzcd} C(f) \arrow[dr, "1"'] & & Y \arrow[ll] \arrow[dr, "g"] & & C(g) \arrow[ll, "1"'] \arrow[llll, bend right, "1"'] \\ & X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "gf"] & & Z \arrow[ur] \arrow[dl] & \\ & & C(gf). \arrow[ul, "1"] & & \end{tikzcd}$$

Определим морфизмы $u\colon C(f)\to C(gf), u(k,l)=(k,g(l))$ и $v\colon C(gf)\to C(g), v(k,m)=(f(k),m)$. Легко видеть, что это действительно морфизмы комплексов и при этом два недостающие треугольника в диаграмме октаэдра оказываются коммутативными (в категории комплексов). Проверим, что треугольник

$$C(f)\xrightarrow{u}C(gf)\xrightarrow{v}C(g)\xrightarrow{w}C(f)[1],$$

– выделенный, где $w(l,m)=(0,l)$. А именно, он изоморфен стандартному треугольнику при помощи диаграммы

$$\begin{tikzcd} C(f)^\bullet \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & C(gf)^\bullet \arrow[r, "v"] \arrow[d, equal] & C(g)^\bullet \arrow[r, "w"] \arrow[d, shift left, "\alpha"] & C(f)[1]^\bullet \arrow[d, equal] \\ C(f)^\bullet \arrow[r, "u"] & C(gf)^\bullet \arrow[r, "v'"] & C(u)^\bullet \arrow[r, "w'"] \arrow[u, shift left, "\beta"] & C(f)[1]^\bullet. \end{tikzcd}$$

По определению, $C(u)^i=C(f)^{i+1}\oplus C(gf)^i=K^{i+1}\oplus L^{i+1}\oplus K^{i+1}\oplus M^i$. Определим морфизмы $\alpha\colon C(g)\to C(u), \alpha(l,m)=(0,l,0,m)$, и $\beta\colon C(u)\to C(g), \beta(k,l,k',m)=(l+f(k'),m)$. Проверки показывают, что α и β – действительно морфизмы комплексов, $\beta\alpha=1_{C(g)}$, $v=\beta v'$, $w=w'\alpha$. Кроме того, $\alpha\beta$ гомотопно $1_{C(u)}$, гомотопия задаётся при помощи отображений $h(k,l,k',m)=(k',0,0,0)$. Это и означает изоморфизм двух треугольников. Слушателю остаётся лишь проверить коммутативность диаграммы октаэдра. □

Задача 4. Проверьте, что в диаграмме октаэдра, построенной в доказательстве предложения, два возможных морфизма из Y в Y' и из Y' в $Y[1]$ совпадают.
Задача 5. Приведите пример, показывающий, что в аксиоме TR3 морфизм w не единственен, даже если $u=1_X, v=1_Y$.

Теперь введём триангулированную структуру на производной категории. Пусть $\mathcal{D}^*(\mathcal{A})$ – одна из версий производной категории. В качестве функтора сдвига возьмём обычный сдвиг комплексов, выделенным треугольником назовём треугольник, изоморфный (в $\mathcal{D}^*(\mathcal{A})$) стандартному треугольнику $K^\bullet\xrightarrow{f}L^\bullet\to C(f)^\bullet\to K[1]^\bullet$.

Проверять, что эти данные удовлетворяют аксиомам триангулированной категории, удобно в общем контексте локализации триангулированных категорий.

Пусть $\mathcal{T}$ – триангулированная категория, S – класс морфизмов в $\mathcal{T}$, удовлетворяющий (правым) условиям Оре. Предположим, что S также удовлетворяет условиям

1. $S[1]=S$,
2. если в TR3 морфизмы u и v лежат в S, то w можно выбрать также лежащим в S.

Введём сдвиг на локализованной категории $\mathcal{T}[S^{-1}]$: такой же, как и в $\mathcal{T}$ на объектах, $(fs^{-1})[1]=f[1](s[1])^{-1}$ на морфизмах. Определим выделенные треугольники в $\mathcal{T}[S^{-1}]$ как треугольники, изоморфные треугольнику вида $Q(X)\to Q(Y)\to Q(Z)\to Q(X[1])$, где $X\to Y\to Z\to X[1]$ – выделенный треугольник в $\mathcal{T}$.

Предложение 8. *Категория $\mathcal{T}[S^{-1}]$ с введёнными выше функтором сдвига и выделенными треугольниками триангулированна.*

Доказательство. Проверять нужно три аксиомы: TR1c, TR3 и TR4.

Проверим TR1c. Пусть морфизм $X \to Y$ задан домиком $X \xleftarrow{s} X' \xrightarrow{f} Y$. Дополним f до выделенного треугольника $X' \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X'$. Диаграмма

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, equal] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, equal] & X'[1] \arrow[d, "{s[1]}"] \\
X \arrow[r, "fs^{-1}"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "sh"] & X[1]
\end{tikzcd}$$

показывает, что треугольник $X \xrightarrow{fs^{-1}} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{sh} X$ также выделен.

Проверим TR3. Можно считать, что выделенные треугольники, фигурирующие в формулировке – стандартные, а морфизмы $X \to X'$ и $Y \to Y'$ заданы домиками $X \xleftarrow{s} X'' \xrightarrow{u} X'$ и $Y \xleftarrow{t} Y'' \xrightarrow{v} Y'$. Далее, заменяя домик $X \xleftarrow{s} X'' \xrightarrow{u} X'$ на эквивалентный, можно считать, что существует морфизм $f''\colon X'' \to Y''$ такой, что $vf'' = f'u$ и $tf'' = fs$. Дополним f'' до выделенного треугольника $X'' \xrightarrow{f''} Y'' \xrightarrow{g''} Z'' \xrightarrow{h''} X''[1]$. По аксиоме TR3 существуют морфизмы выделенных треугольников, замыкающие диаграмму

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "h"] & X[1] \\
X'' \arrow[r, "f''"] \arrow[u, "s"] \arrow[d, "u"] & Y'' \arrow[r, "g''"] \arrow[u, "t"] \arrow[d, "v"] & Z'' \arrow[r, "h''"] \arrow[u, dashed, "r"] \arrow[d, dashed, "w"] & X''[1] \arrow[u, "{s[1]}"] \arrow[d, "{u[1]}"] \\
X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r, "h'"] & X'[1].
\end{tikzcd}$$

Причём r можно выбрать лежащим в S по условию 2. Отсюда видно, что морфизм $wr^{-1}\colon Z \to Z'$ будет искомым.

Проверим TR4. Пусть дана пара морфизмов $fs^{-1}\colon X \to Y$ и $gt^{-1}\colon Y \to Z$. Построим изоморфную ей пару морфизмов f' и g, пришедших из $\mathcal{T}$: рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
X'' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "t'"] & Y' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "t"] & Z \arrow[dd, equal] \\
X' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"] & Y \arrow[d, equal] & \\
X \arrow[r, "fs^{-1}"] & Y \arrow[r, "gt^{-1}"] & Z
\end{tikzcd}$$

Для пары f' и g требуемая диаграмма октаэдра существует по аксиоме TR4 для $\mathcal{T}$. Заменяя в ней X'' на X при помощи st' и Y' на Y при помощи t, получаем требуемую диаграмму для исходной пары. $\square$

Триангулированность производных категорий теперь следует из того, что класс квазиизоморфизмов в гомотопической категории удовлетворяет условиям 1 и 2. Для условия 1 это очевидно, условие 2 проверяется с помощью длинной точной последовательности в когомологиях (предложение 4) и 5-леммы.

Задача 6. Любую точную тройку комплексов $0 \to K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \xrightarrow{g} M^\bullet \to 0$ можно дополнить до выделенного треугольника в производной категории.