03.12.2010
Листок 13

Спектральные последовательности

В прошлый раз мы построили классические производные функторы

$$\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F},\mathcal{G}), \qquad \mathcal{E}\mathrm{xt}^i(\mathcal{F},\mathcal{G}) \qquad \text{и} \qquad \mathrm{Tor}_i(\mathcal{F},\mathcal{G})$$

в категории пучков модулей над пучком колец на топологическом пространстве. Ext мы определили как производные функторы по второму аргументу, их можно вычислять при помощи инъективных резольвент. Можно также определить глобальный производный функтор $R\,\mathrm{Hom}(\mathcal{F},-)$ от $\mathrm{Hom}(\mathcal{F},-)$ на категории $\mathcal{D}^+(\mathcal{R}\text{–mod})$, аналогично для $\mathcal{H}om$. Функторы $\mathrm{Tor}_i(\mathcal{F},-)$ мы определили как гомологии глобального производного функтора

$$\mathcal{F}\otimes^L_{\mathcal{R}}-\colon \mathcal{D}^-(\mathcal{R}\text{–mod})\to\mathcal{D}^-(\mathcal{R}\text{–mod}),$$

который в свою очередь можно вычислять при помощи плоских резольвент. Ниже мы увидим, что если в категории $\mathcal{R}$ – f.g.mod конечно порождённых $\mathcal{R}$-модулей достаточно много локально свободных пучков, то существует глобальный производный функтор

$$R\,\mathcal{H}om(-,\mathcal{G})\colon \mathcal{D}^-(\mathcal{R}-\mathrm{f.g.mod})\to\mathcal{D}^+(\mathcal{R}\text{–mod}),$$

и его можно вычислять при помощи локально свободных резольвент. Это следует из следующей конструкции.

Пусть класс объектов $\mathcal{P}$ абелевой категории $\mathcal{A}$ обладает двумя свойствами относительно функтора $F\colon\mathcal{A}\to\mathcal{B}$:

1. любой объект из $\mathcal{A}$ накрывается некоторым объектом из $\mathcal{P}$;
2. если $K_\bullet$ – точный ограниченный справа комплекс объектов из $\mathcal{P}$, то комплекс $F(K_\bullet)$ точен.

Тогда класс $\mathcal{P}$ называется *приспособленным слева* к функтору F. Например, в категории модулей над кольцом класс проективных объектов приспособлен слева к любому функтору, точному справа. Вообще, класс проективных объектов приспособлен слева к любому точному справа функтору, если проективных объектов достаточно много.

Предложение 1. *Пусть $F\colon\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ – функтор между абелевыми категориями. Пусть $\mathcal{P}$ – класс объектов в $\mathcal{A}$, приспособленный слева к функтору F. Тогда существует глобальный производный функтор $LF\colon\mathcal{D}^-(\mathcal{A})\to\mathcal{D}^-(\mathcal{B})$.*

Доказательство. Всё следует из леммы, которую мы доказали в прошлый раз. Нужно рассмотреть функтор F между триангулированными категориями $\mathcal{T}=\mathrm{K}^-(\mathcal{A})\to\mathcal{D}^-(\mathcal{B})=\mathcal{T}'$, полную подкатегорию ацикличных комплексов $\mathcal{N}\subset\mathcal{T}$ и полную подкатегорию $\mathcal{T}_0\subset\mathcal{T}$, образованную комплексами, у которых все члены лежат в $\mathcal{P}$. Тогда условие $F(\mathcal{N}\cap\mathcal{T}_0)$ выполнено по предположению. А то, что у любого объекта $\mathcal{T}$ есть резольвента объектом из $\mathcal{T}_0$, доказывается так же, как и для проективных резольвент ограниченных справа комплексов модулей над кольцом. Значит, согласно лемме 6 из прошлой лекции, существует производный функтор LF. ☐

Следствие 2. *В предположениях предложения 1 имеем $LF(K_\bullet)=F(P(K)_\bullet)$, где $P(K)_\bullet$ – резольвента комплекса $K_\bullet\in\mathrm{Kom}^-(\mathcal{A})$ с членами, лежащими в $\mathcal{P}$.*

Доказательство. Следует из доказательства леммы 6 из прошлой лекции. ☐

Примеры: в категории пучков модулей над пучком колец $\mathcal{R}$ класс плоских модулей приспособлен слева к функтору $\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{R}}-$, где $\mathcal{F}$ – любой пучок (условие 2 проверяется локально в каждом слое). Класс вялых пучков приспособлен к функтору глобальных сечений $\Gamma\colon \mathcal{R}-\mathrm{mod}\to\mathcal{A}b$ (это следует из доказанных свойств вялых пучков). Если в $\mathcal{R}-\mathrm{f.g.mod}$ достаточно много локально свободных пучков, то класс локально свободных пучков конечного ранга приспособлен слева к функтору $\mathcal{H}om(-,\mathcal{G})$ (условие 2 тоже проверяется локально, см. ниже).

Задача 1. a) Пусть $\mathcal{F}$ – локально свободный пучок конечного ранга, а $\mathcal{G}$ – ещё один пучок $\mathcal{R}$-модулей, тогда $\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{F},\mathcal{G})_x=\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}_x}(\mathcal{F}_x,\mathcal{G}_x)$ для любой точки $x\in X$.

b) Покажите, что для свободного пучка $\mathcal{F}$ бесконечного ранга предыдущее утверждение не обязательно верно.

c) Пусть $\mathcal{F}_\bullet$ – ограниченный справа точный комплекс локально свободных пучков конечного ранга, тогда комплекс $\mathcal{H}om(\mathcal{F}_\bullet,\mathcal{G})$ точен.

Задача 2. Пусть $\mathcal{F}$ – пучок $\mathcal{R}$-модулей на топологическом пространстве X. Определим $\mathcal{F}^*$ как $\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{F},\mathcal{R})$. Покажите, что

a) если $\mathcal{F}$ – локально свободный пучок конечного ранга, то $\mathcal{F}^*$ – тоже локально свободный пучок, причём того же ранга, что и $\mathcal{F}$;

b) функтор * задаёт эквивалентность категории локально свободных пучков $\mathcal{R}$-модулей конечного ранга и двойственной к ней категории;

c) $\mathcal{H}om(\mathcal{F},\mathcal{G})=\mathcal{F}^*\otimes\mathcal{G}$ для локально свободного пучка $\mathcal{F}$ конечного ранга;

d) если $\mathcal{F}$ – локально свободный пучок ранга 1, то $\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{R}}\mathcal{F}^*\cong\mathcal{R}$.

Мы определили глобальные производные функторы

$$\mathcal{F}\otimes^L_{\mathcal{R}}- \qquad \text{и} \qquad -\otimes^L_{\mathcal{R}}\mathcal{F}\colon \mathcal{D}^-(\mathcal{R}-\mathrm{mod})\to\mathcal{D}^-(\mathcal{R}-\mathrm{mod}).$$

Также можно определить производное тензорное умножение, у которого оба аргумента – комплексы:

$$-\otimes^L-\colon \mathcal{D}^-(\mathcal{R}-\mathrm{mod})\times\mathcal{D}^-(\mathcal{R}-\mathrm{mod})\to\mathcal{D}^-(\mathcal{R}-\mathrm{mod}).$$

Напомним, что бикомплекс над абелевой категорией $\mathcal{A}$ – набор объектов $K^{p,q}$ и морфизмов

$$d_1^{p,q}\colon K^{p,q}\to K^{p+1,q},\qquad d_{II}^{p,q}\colon K^{p,q}\to K^{p,q+1},$$

для которых

$$d_I^2=d_{II}^2=0,\qquad d_Id_{II}=d_{II}d_I.$$

Свёрткой бикомплекса K называется комплекс $Tot^\bullet(K)$, в котором $Tot^n=\oplus_{p+q=n}K^{p,q}$ и $d_{Tot}(x)=d_I+(-1)^pd_{II}$ при $x\in K^{pq}$.

Будем строить производное тензорное умножение как производный функтор по первому аргументу, т.е. как локализацию функтора $Tot_\bullet(-\otimes_{\mathcal{R}}L_\bullet)\colon \mathrm{K}^-(\mathcal{R}-\mathrm{mod})\to\mathcal{D}^-(\mathcal{R}-\mathrm{mod})$. Такая локализация существует, для доказательства нужно рассмотреть подкатегорию ограниченных справа комплексов плоских пучков модулей. Основная проверка содержится в следующей задаче.

Задача 3. Пусть $K_\bullet$ – точный ограниченный справа комплекс плоских модулей, а $L_\bullet$ – ограниченный справа комплекс. Тогда комплекс $Tot_\bullet(K_\bullet\otimes_{\mathcal{R}}L_\bullet)$ точен.

Далее нужно проверить, что определённый выше $K_\bullet\otimes^L_{\mathcal{R}}L_\bullet$ будет функториален по второму аргументу на категории $\mathcal{D}^-(\mathcal{R}-\mathrm{mod})$. Очевидно, что $K_\bullet\otimes_{\mathcal{R}}-$ – функтор из $\mathrm{K}^-(\mathcal{R}-\mathrm{mod})$ в $\mathcal{D}^-(\mathcal{R}-\mathrm{mod})$ и переводит выделенные треугольники в выделенные. Из следующей задачи вытекает, что $K_\bullet\otimes_{\mathcal{R}}-$ переводит квазиизоморфизмы в изоморфизмы и поэтому пропускается через производную категорию.

Задача 4. Пусть $K_\bullet$ – ограниченный справа комплекс плоских модулей, а $L_\bullet$ – точный ограниченный справа комплекс. Тогда комплекс $Tot_\bullet(K_\bullet \otimes_{\mathcal{R}} L_\bullet)$ точен.

Как и в случае с классическими производными функторами, производное тензорное умножение можно определять как производный функтор по второму аргументу, а можно – по двум аргументам сразу. Полученный бифунктор во всех трёх случаях будет изоморфным. Это можно доказывать так же, как и в случае классических производных функторов, а можно развить абстрактную теорию производных бифункторов, мы этим не будем заниматься.

Задача 5.

a) Определите производные функторы

$$R\,\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(-,-)\colon \mathcal{D}^-(\mathcal{R} - \text{f.g.mod}) \times \mathcal{D}^+(\mathcal{R}\text{−mod}) \to \mathcal{D}^+(\mathcal{R}\text{−mod})$$

и

$$R\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(-,-)\colon \mathcal{D}^-(\mathcal{R} - \text{f.g.mod}) \times \mathcal{D}^+(\mathcal{R}\text{−mod}) \to \mathcal{A}b$$

(проще всего это сделать по второму аргументу).

b) Проверьте, что $R\,\mathcal{H}om(K_\bullet, L^\bullet) \cong \mathcal{H}om(P(K)_\bullet, L^\bullet)$, где $P(K)_\bullet$ – резольвента $K_\bullet$ локально свободными пучками конечного ранга.

Как, зная пучки $\mathcal{E}\mathrm{xt}^i(\mathcal{F},\mathcal{G})$, вычислить $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F},\mathcal{G})$? Насколько близок комплекс $F(K_\bullet)$ к производному функтору $LF(M)$, если $K_\bullet$ – какая-то резольвента M, не обязательно приспособленная к функтору F? На эти и другие вопросы помогают ответить спектральные последовательности.

Что такое спектральная последовательность? *Спектральной последовательностью* называется следующий набор данных:

1. последовательность биградуированных объектов $E_k^{p,q}$ $(p,q \in \mathbb{Z}, \mathsf{k} \in \mathbb{N})$ некоторой абелевой категории $\mathcal{A}$ (говорят, что объекты $E_k^{\bullet\bullet}$ образуют k-й лист);

2. набор дифференциалов $d_k^{p,q}\colon E_k^{p,q} \to E_k^{p+k,q-k+1}$ таких, что $d^2 = 0$;

3. набор изоморфизмов $\ker d_k^{p,q}/\operatorname{im} d_k^{p-k,q+k-1} \to E_{k+1^{p,q}}$.

Объекты следующего листа строятся как когомологии дифференциалов на предыдущем листе, а вот дифференциалы на следующем листе не определяются предыдущим. Говорят, что последовательность *сходится*, если для любых p,q начиная с некоторого k члены $E_k^{p,q}$ перестают меняться (т.е. $d_k^{p,q} = d_k^{p-k,q+k-1} = 0$). В таком случае определён бесконечный лист $E_\infty^{p,q}$. Говорят, что последовательность сходится к градуированному объекту E^n, если существует регулярная убывающая фильтрация $\ldots \supset F_pE^n \supset F_{p+1}E^n \supset \ldots$ (т.е. $\cap_p F_pE^n = 0, \cup_p F_pE^n = E^n$), для которой

$$F_pE^{p+q}/F_{p+1}E^{p+q} \cong E_\infty^{p,q}.$$

Лемма 3. *Пусть спектральная последовательность сосредоточена в 1-м или 3-м координатом углу. Тогда она сходится.*

Доказательство. Очевидно. ☐

Если листы спектральной последовательности перестают меняться, начиная с k-го, то говорят, что последовательность *вырождается на k-м члене.*

Как строить спектральные последовательности? Мы рассмотрим одну конструкцию, частным случаем которой будут все интересующие нас примеры, – спектральную последовательность фильтрованного комплекса.

Пусть $K^\bullet$ – комплекс объектов абелевой категории $\mathcal{A}$. Пусть у $K^\bullet$ задана убывающая фильтрация подкомплексами $F_pK^\bullet \subset K^\bullet$. Построим спектральную последовательность следующим образом.

Определим сначала $Z_k^{p,q}$:

$$Z_k^{p,q} = F_pK^{p+q} \cap d^{-1}(F_{p+k}K^{p+q+1}).$$

Это немного больше, чем циклы в $F_pK^{p,q}$. В $Z_k^{p,q}$ есть подобъекты: $Z_{k-1}^{p+1,q-1}$ и $dZ_{k-1}^{p-k+1,q+k-2}$. Определим $E_k^{p,q}$ как фактор

$$E_k^{p,q} = Z_k^{p,q}/(Z_{k-1}^{p+1,q-1} + dZ_{k-1}^{p-k+1,q+k-2}).$$

Задача 6. Проверьте, что d – дифференциал комплекса $K_\bullet$ – переводит $Z_k^{p,q}$ в $Z_k^{p+k,q-k+1}$, а $Z_{k-1}^{p+1,q-1} + dZ_{k-1}^{p-k+1,q+k-2}$ – в $Z_{k-1}^{p+k+1,q-k} + dZ_{k-1}^{p+1,q-1}$ и тем самым индуцирует морфизм

$$d_k^{p,q}\colon E_k^{p,q} \to E_k^{p+k,q-k+1}.$$

Можно проверить, что справедлив следующий факт:

Лемма 4. *Для определённых выше $E_k^{p,q}$ и $d_k^{p,q}$ верно, что*

$$\ker d_k^{p,q}/\operatorname{im} d_k^{p-k,q+k-1} \cong E_{k+1}^{p,q}.$$

Таким образом, получаем спектральную последовательность.

Предложение 5. *Предположим, что на каждом члене K^i фильтрация конечна: $F_pK^i = K_i$ при $p << 0$, $F_pK^i = 0$ при $p >> 0$. Тогда спектральная последовательность сходится к $E^n = H^n(K^\bullet)$.*

Доказательство. Вложения подкомплексов $F_pK^\bullet \to K^\bullet$ индуцируют гомоморфизмы когомологий $H^n(F_pK^\bullet) \to H^n(K^\bullet)$. Обозначим их образы через $F_pH^n(K^\bullet)$. Из условия следует, что при больших p $F_pH^n(K^\bullet) = 0$, а при маленьких p – $F_pH^n(K^\bullet) = H^n(K^\bullet)$. Получаем регулярную фильтрацию на когомологиях $K^\bullet$. Покажем, что к ней и сходится спектральная последовательность.

При больших k имеем $Z_k^{p,q} = Z(K^\bullet) \cap F_pK^{p+q}$ и $dZ_{k-1}^{p-k+1,q+k-2} = B(K^\bullet) \cap F_pK^{p+q}$. Следовательно, при больших k

$$\begin{aligned} E_\infty^{p,q} = E_k^{p,q} = Z_k^{p,q}/(Z_{k-1}^{p+1,q-1} + dZ_{k-1}^{p-k+1,q+k-2}) = \\ = (Z(K^\bullet) \cap F_pK^{p+q})/(B(K^\bullet) \cap F_pK^{p+q} + Z(K^\bullet) \cap F_{p+1}K^{p+q}) = \\ = F_pH^{p+q}(K)/F_{p+1}H^{p+q}(K), \end{aligned}$$

что и требовалось. □

Задача 7. Вычислите спектральную последовательснотъ, связанную с канонической фильтрацией комплекса $K^\bullet$ подкомплексами $(\tau_{\leqslant p}K)^\bullet$.

Другая важная для нас конструкция – спектральная последовательность бикомплекса. Она связана с естественными фильтрациями на свёртке бикомплекса.

Пусть $K_{\bullet\bullet}$ – бикомплекс. Введём на $Tot^{\bullet}(K)$ горизонтальную фильтрацию:

$$F_m Tot^n(K) = \oplus_{p+q=n, p\geqslant m} K^{p,q}.$$

Если на каждой диагонали $p+q = const$ находится конечное число членов бикомплекса, то эта фильтрация будет регулярной, и соответствующая спектральная последовательность будет сходиться к когомологиям свёртки бикомплекса. Вычислим её явно.

У бикомплекса определены два типа когомологий – относительно горизонтальных дифференциалов и относительно вертикальных, их обозначают $H_I^{p,q}(K)$ и $H_{II}^{p,q}(K)$, аналогично для циклов и границ. Вертикальные дифференциалы индуцируют морфизмы $H_I^{p,q}(K) \to H_I^{p,q+1}(K)$, можно вычислить кратные когомологии $H_{II}H_I^{p,q}(K)$ относительно этих дифференциалов.

Предложение 6. *В спектральной последовательности бикомплекса, связанной с горизонтальной фильтрацией,*

$$E_1^{p,q} = H_{II}^{p,q}(K), \qquad E_2^{p,q} = H_I H_{II}^{p,q}(K).$$

Доказательство. По определению, имеем

$$Z_1^{p,q} = \ker d_{II}^{p,q} \bigoplus \oplus_{i>0} K^{p+i,q-i}, \qquad Z_0^{p+1,q-1} = \oplus_{i>0} K^{p+i,q-i},$$

$$d_{Tot} Z_0^{p,q-1} = \operatorname{im} d_{II}^{p,q-1} \pmod{\oplus_{i>0} K^{p+i,q-i}}, \quad Z_0^{p+1,q-1} + d_{Tot} Z_0^{p,q-1} = \operatorname{im} d_{II}^{p,q-1} \bigoplus \oplus_{i>0} K^{p+i,q-i},$$

и следовательно $E_1^{p,q} = \ker d_{II}^{p,q} / \operatorname{im} d_{II}^{p,q-1} = H_{II}^{p,q}(K)$. Вычисляя когомологии относительно d_1, получаем выражение для E_2. $\square$

Аналогично можно рассматривать вертикальную фильтрацию и связанную с ней спектральную последовательность.

Пример: спектральная последовательность Ходжа-де-Рама.

Теперь ответим на второй вопрос. Пусть $K_{\bullet}$ – резольвента объекта M абелевой категории $\mathcal{A}$, а $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ – точный справа функтор. Пусть для простоты в $\mathcal{A}$ достаточно много проективных объектов. Выберем у каждого K_i проективную резольвенту $P_{i\bullet}$ и продолжим дифференциалы d_i^K до морфизма резольвент. Как мы увидим ниже, их можно выбрать так, чтобы получить бикомплекс $P_{i,j}$. Он сосредоточен в 3-м координатном углу. Рассмотрим спектральную последовательность, связанную с горизонтальной фильтрацией этого бикомплекса. Получим $E_1^{p,q} = 0$ при $q \neq 0$, $E_1^{p,0} = K^p$. Вычисляя следующий член, получаем $E_2^{p,q} = 0$ при $q \neq 0$ или $p \neq 0$, $E_2^{0,0} = M$. Ясно, что $E_2 = E_\infty$ и, следовательно, мы знаем когомологии свёртки $Tot_{\bullet}(P)$ – они равны $M[0]$. Т.е. комплекс $Tot_{\bullet}(P)$ – проективная резольвента объекта M и, значит,

$$L_i F(M) = H_i(F(Tot_{\bullet}(P_{\bullet\bullet}))) = H_i(Tot_{\bullet}(F(P_{\bullet\bullet}))).$$

Эти когомологии можно вычислять при помощи спектральной последовательности, связанной с горизонтальной фильтрацией бикомплекса $F(P_{\bullet\bullet})$. По определению производных функторов, имеем $E_1^{pq} = L_{-q}F(K^p)$. Мы доказали

Предложение 7. *Пусть в абелевой категории $\mathcal{A}$ достаточно много проективных объектов. Пусть $K_{\bullet}$ – резольвента объекта M, а $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ – точный справа функтор. Тогда существует спектральная последовательность с*

$$E_1^{pq} = L_{-q}F(K_{-p}),$$

сходящаяся к $E^n = L_{-n}F(M)$.

Заметим, что из этого предложения моментально вытекает то, что производные функторы можно вычислять при помощи ацикличных резольвент.

Наконец, ответим на первый вопрос о связи локальных и глобальных Ext'ов. Это естественно делать в более общем контексте производного функтора от композиции.

Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ – абелевы категории, а $F\colon \mathcal{A}\to\mathcal{B}$ и $G\colon \mathcal{B}\to\mathcal{C}$ – аддитивные функторы, точные справа. Как связаны производные функторы от GF, G и F?

Предложение 8. *Предположим, что существуют классы объектов $\mathcal{P}_\mathcal{A}\subset\mathcal{A}$ и $\mathcal{P}_\mathcal{B}\subset\mathcal{B}$, приспособленные слева к функторам F и G соответственно. Пусть $F(\mathcal{P}_\mathcal{A})\subset\mathcal{P}_\mathcal{B}$. Тогда производный функтор $L(GF)$ существует и изоморфен $LG\circ LF$.*

Доказательство. Во-первых, класс $\mathcal{P}_\mathcal{A}$ приспособлен к функтору GF слева, так как GF переводит ограниченные справа точные комплексы объектов из $\mathcal{P}_\mathcal{A}$ в точные. Следовательно, производный функтор $L(GF)$ существует. Далее, обозначая через F, G и GF функторы между гомотопическими категориями, а через Q локализации, мы имеем морфизмы функторов $LF\circ Q\to QF$ и $LG\circ Q\to QG$, а также их композицию $LG\circ LF\circ Q\to LG\circ Q\circ F\to QGF$. По определению производного функтора, она пропускается через канонический морфизм $LG\circ LF\to L(GF)$. Покажем, что этот морфизм – изоморфизм. Действительно, пусть $P_\bullet\in \mathrm{Kom}^-(\mathcal{P}_\mathcal{A})$ – резольвента для комплекса $K_\bullet\in\mathrm{Kom}^-(\mathcal{A})$. Тогда $LF(K_\bullet)$ изоморфен $F(P_\bullet)$, причём последний комплекс лежит в $\mathrm{Kom}^-(\mathcal{P}_\mathcal{B})$ и поэтому $LG(LF(K_\bullet))\cong G(F(P_\bullet))$. С другой стороны, $L(GF)(\mathrm{K}_\bullet)$ также изоморфно $GF(P_\bullet)$, что и требовалось. $\square$

Теперь выразим равенство $L(GF) = LG\circ LF$ на языке спектральной последовательности классических производных функторов. Для этого нам понадобится достраивать комплексы почленными проективными резольвентами до бикомплексов, обладающих хорошими свойствами.

Бикомплекс $K_{\bullet\bullet}$ называется (проективной) *резольвентой Картана-Эйленберга* комплекса $L_\bullet$, если

- для любого i комплекс $K_{i\bullet}$ – проективная резольвента для L_i;
- для любого i комплекс $Z^I(K_{i\bullet})$ – проективная резольвента для $Z_i(L)$;
- для любого i комплекс $B^I(K_{i\bullet})$ – проективная резольвента для $B_i(L)$;
- для любого i комплекс $H^I(K_{i\bullet})$ – проективная резольвента для $H_i(L)$;
- точные тройки $0\to Z^I_{i,j}(K)\to K_{i,j}\to B^I_{i+1,j}(K)\to 0$ и $0\to B^I_{i,j}(K)\to Z^I_{i,j}(K)\to H^I_{i,j}(K)\to 0$ расщепимы при всех i, j.

Несложно видеть, что свёртка резольвенты Картана-Эйленберга будет проективной резольвентой для $L_\bullet$, если в резольвенте Картана-Эйленберга на каждой диагонали $p+q=const$ находится конечное число членов. Это выполнено, если комплекс $L_\bullet$ ограничен справа или $\mathcal{A}$ имеет конечную гомологическую размерность.

Предложение 9. *Пусть в абелевой категории достаточно много проективных объектов. Тогда у любого комплекса $L_\bullet$ существует резольвента Картана-Эйленберга.*

Доказательство. Воспользуемся следующим фактом, доказанным ранее: если $0\to K\to L\to M\to 0$ – точная тройка, то для любых проективных резольвент $P(K)_\bullet$ и $P(M)_\bullet$ существует проективная резольвента $P(L)_\bullet$ и почленно расщепимая точная тройка резольвент $0\to P(K)_\bullet\to P(L)_\bullet\to P(M)_\bullet\to 0$, согласованная с исходной точной тройкой.

Построим сначала произвольным образом проективные резольвенты для $H_i(L)$ и $B_i(L)$. Рассмотрим точные тройки $0 \to B_i(L) \to Z_i(L) \to H_i(L) \to 0$. Дополним их до троек проективных резольвент, как указано выше. Затем рассмотрим точные тройки $0 \to Z_i(L) \to L_i \to B_{i+1}(L) \to 0$ и снова дополним их до троек резольвент, как описано выше. Теперь склеим все точные тройки резольвент в бикомплекс, очевидно, требуемые свойства будут выполнены. $\square$

Предложение 10. *Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ – абелевы категории, а $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ и $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ – точные справа функторы. Пусть в $\mathcal{A}$ достаточно много проективных объектов, в $\mathcal{B}$ имеется класс объектов $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}$, приспособленный слева к G, и пусть $F(\mathrm{Proj}(\mathcal{A})) \subset \mathcal{P}_{\mathcal{B}}$. Тогда для любого объекта $M \in \mathcal{A}$ имеется спектральная последовательность с $E_2^{p,q} = L_{-p}G(L_{-q}F(\mathcal{A}))$, сходящаяся к $E^n = L_{-n}(GF)(\mathcal{A})$.*

Доказательство. Пусть $P_\bullet$ – проективная резольвента M. По предложению 8, $L(GF)(M)$ можно вычислять как $LG(LF(M)) \cong LG(F(P_\bullet))$. Построим резольвенту Картана-Эйленберга $K_{\bullet\bullet}$ для $F(P_\bullet)$. Свёртка $Tot_\bullet(K)$ будет проективной резольвентой для $F(P_\bullet)$, поэтому $G(Tot_\bullet(K)) \cong LG(F(P_\bullet)) \cong L(GF)(M)$. Гомологии свёртки $G(Tot_\bullet(K)) = Tot_\bullet(G(K))$ вычислим при помощи спектральной последовательности, связанной с вертикальной фильтрацией. Так как строки резольвенты Картана-Эйленберга имеют тривиальные дифференциалы (проекции и вложения прямых слагаемых), вычисление горизонтальных когомологий $H^I(G(K_{\bullet\bullet}))$ коммутирует с применением G. Поэтому $H^I(G(K_{\bullet\bullet})) = G(H^I(K_{\bullet\bullet}))$. С другой стороны, горизонтальные когомологии $H^I(K_{i\bullet})$ – проективная резольвента для $H_i(F(P_\bullet))$. Поэтому

$$H^{II}H^I(G(K))_{i,j} = H^{II}G(H^I(K))_{i,j} = L_jG(H_i(F(P_\bullet))) = L_jG(L_iF(M)).$$

$\square$

Из определений следует, что $\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{F},\mathcal{G}) = \Gamma(X, \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{F},\mathcal{G}))$. Рассматривая $\mathcal{H}om$ как функтор по второму аргументу, можно применить утверждение про композицию производных функторов:

$$\mathcal{R}\text{−mod} \xrightarrow{\mathcal{H}om(\mathcal{F},-)} \mathcal{R}\text{−mod} \xrightarrow{\Gamma(X,-)} \mathcal{A}b.$$

Если ограничиться инъективными пучками вида $I = \prod_x I_x$ (этого можно и не делать, см. задачу ниже), то пучки $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, I)$ также будут иметь вид $\prod_x I_x$, и будут вялыми. Поэтому можно применить предыдущее предложение (точнее, его аналог для точных слева функторов), взяв в качестве $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}$ класс вялых пучков. Получаем

Следствие 11. *Существует спектральная последовательность с*

$$E_2^{pq} = H^p(X, \mathcal{E}\mathrm{xt}^q(\mathcal{F},\mathcal{G})),$$

сходящаяся к $E^n = \mathrm{Ext}^n(\mathcal{F},\mathcal{G})$. Имеется точная последовательность

$$0 \to H^1(X, \mathcal{H}om(\mathcal{F},\mathcal{G})) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F},\mathcal{G}) \to H^0(X, \mathcal{E}\mathrm{xt}^1(\mathcal{F},\mathcal{G})) \to H^2(X, \mathcal{H}om(\mathcal{F},\mathcal{G})) \to \mathrm{Ext}^2(\mathcal{F},\mathcal{G}).$$

Задача 8. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ – пучки $\mathcal{R}$-модулей, причём $\mathcal{G}$ инъективный. Тогда пучок $\mathcal{H}om(\mathcal{F},\mathcal{G})$ вялый.