4. Теория меры, лекция 4: Булевы алгебры и измеримые множества

4.1. Булевы алгебры

Определение 4.1. Пусть $(,\succcurlyeq)$ – частично упорядоченное множество, а S – его подмножество. **Верхняя грань** $\inf S$ есть элемент $m \in M$, который удовлетворяет $m \succcurlyeq s$ для каждого $s \in S$. **Точная верхняя грань** $\sup S$ есть такая верхняя грань $m \in M$, что для любой другой верхней грани m' имеем $m \preccurlyeq m'$. Аналогично определяется **точная нижняя грань** $\inf S$.

Замечание 4.2. ТВГ и ТНГ не всегда существует.

Определение 4.3. **Решетка** это частично упорядоченное множество S такое, что для любых $s, s' \in S$ существует точная верхняя грань $x \wedge s'$ и точная нижняя грань $s \vee s'$.

Замечание 4.4. Эти операции удовлетворяют следующим условиям (докажите это).

а. Идемпотентность: $a \wedge a = a \vee a = a$.

б. Коммутативность: $a \wedge b = b \wedge a, a \vee b = b \vee a$.

в. Ассоциативность: $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$, $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$,

г. Абсорбция: $a \vee (a \wedge b) = a$, $a \wedge (a \vee b) = a$.

Задача 4.5. Докажите, наоборот, что каждое множество, снабженное парой бинарных операций $\wedge, \vee$ удовлетворяющих вышеприведенным условиям, снабжено частичным порядком и является решеткой.

Определение 4.6. **Единицей** решетки называется максимальный элемент, **нулем** – минимальный. **Дополнением** $\neg x$ для элемента решетки $x \in A$ называется такой $y \in A$, что $x \wedge y = 0$, $x \vee y = 1$

Определение 4.7. **Булева алгебра** есть решетка A, удовлетворяющая следующим свойствам.

а. В A есть 0, 1 и дополнение $\neg x$ для каждого элемента $x \in A$.

б. Дистрибутивность: $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (a \wedge c)$, $(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$.

Задача 4.8. Докажите, что из одной формулы для дистрибутивности, приведенной выше, выводится другая.

Булевы алгебры чрезвычайно полезны в логике и информатике, ибо приведенные выше аксиомы описывают любую логически непротиворечивую систему утверждений. В такой интерпретации, 0 это ложь, 1 истина, $\neg$ отрицание, $\wedge$ "и", а $\vee$ "или".

Той же самой системой аксиом описывается набор подмножеств, замкнутых относительно конечных пересечений, объединений и дополнений (в лекции 1 это называлось "кольцо подмножеств с единицей"). Знаменитая теорема Стоуна о представимости булевых алгебр утверждает, что любая булева алгебра есть кольцо открытозамкнутых подмножеств компактного, хаусдорфова, вполне несвязного топологического пространства, которое однозначно определяется этой булевой алгеброй.

Первоначально, определение булевых алгебр было целиком аксиоматическое – в терминах операций $\wedge$, $\vee$ и довольно богатой системы аксиом, которая называется "законы де Моргана". Для наших целей, будет еще полезнее третья, совсем алгебраическая интерпретация булевых алгебр, в терминах "булевых колец".

Алгебраическое описание логических процессов кажется сейчас почти тривиальным, но в 19-м веке это была одна из центральных тем метафизики, логики и математики. Изобретение Булем и де Морганом подходящего алгебраического описания подвело черту под сотнями лет напряженных исследований метафизики мысли.

Де Морган высказался о революционных исследованиях Буля так.

...То, что символические процессы, изобретенные алгебраистами для численных вычислений, окажутся применимы для выражения каждого хода мысли, и предоставят грамматику и словарь для всеобъемлющей логической системы, казалось невероятным, пока это не было доказано. Когда Гоббс опубликовал свою книгу "Вычисление или логика", он наблюдал отдаленный отблеск некоторых идей, из тех, которые были освещены в трудах мистера Буля...

George Boole
(2 November 1815 – 8 December 1864)

Джордж Буль был самоучка, и не имел формального образования. Его отец Джон Буль, сапожник, был ученым-любителем, и вместо занятия обувью проводил время в научных экспериментах; из-за этого его семья была небогатой. Усмотрев в своем сыне начатки гения, Джон Буль стал обучать его математике и конструированию оптических инструментов. В 14 лет Джордж Буль самостоятельно выучил греческий язык, и опубликовал собственный перевод из греческого поэта

Мелеагра.

Буль был старшим сыном в семье. Когда ему исполнилось 16, Булю пришлось устроиться на работу, чтобы содержать родителей, братьев и сестру, которые совсем обнищали. Несмотря на это, он продолжил занятия наукой, и самостоятельно изучил математический анализ. В скором времени он опубликовал (с помощью де Моргана) несколько научных статей, посвященных применению алгебраических методов в анализе, и за эти публикации получил медаль Королевского общества, а потом стал профессором.

Ближе к концу жизни (а прожил он недолго), Буль стал знаменитостью, за счет революционных исследований в логике. Его выбрали почетным доктором университетов Оксфорда и Дублина, и академиком (точнее, членом Королевского Общества).

Буль умер от простуды, 49 лет от роду. Отправившись из дома читать лекции в свой колледж, Буль промок под дождем, и читал лекции совершенно мокрым. Он вернулся домой с высокой температурой; жена Буля, Мэри Эверест (племянница первооткрывателя Джомолунгмы) была сторонником нетрадиционных методов лечения, и лечила подобное подобным. Она положила его в кровать и вылила несколько ведер холодной воды на академика, считая, что это поможет ему вылечиться, но Буль вместо этого умер.

Буль имел 5 дочерей, одна из которых прославилась как Этель Лилиан Войнич, автор популярного романа "Овод" про революционеров.

4.2. Булевы кольца

Хороший пример решетки получается, если рассмотреть множество идемпотентов.

Определение 4.9. Идемпотент кольца есть элемент, который удовлетворяет $a^2 = a$.

Упражнение 4.10: x является идемпотентом тогда и только тогда, когда $1 - x$ – идемпотент.

Замечание 4.11. Если x, y – идемпотенты в кольце, то xy, $1 - x$ и $1 - y$ – тоже идемпотенты. Значит, $x + y - xy = 1 - (1 - x)(1 - y)$ – идемпотент.

Упражнение 4.12: Пусть R – кольцо, а S – множество всех идемпотентов в R. Определим соотношение $\preccurlyeq$ на S следующим образом: $x \preccurlyeq y$, если $xy = x$. Докажите, что это отношение частичного порядка.

Утверждение 4.13: Пусть R – кольцо характеристики 2 (то есть удовлетворяющее соотношению $2 = 0$). Тогда идемпотенты (с вышеописанным отношением порядка) образуют решетку, где операции записываются так: $x \wedge y = xy$, и $x \vee y = x + y + xy$.

Доказательство: Идемпотентность $x + y + xy$ очевидна, а также соотношения $xy \preccurlyeq x \preccurlyeq x + y + xy$ (проверьте это). Если $z \preccurlyeq x$ и $z \preccurlyeq y$, это значит, что $zx = z = zy$, но в таком случае $zxy = z$. Следовательно, xy есть точная нижняя грань множества $\{x, y\}$. Если $z \succcurlyeq x$ и $z \succcurlyeq y$, то $z \cdot (x + y + xy) = zx + zy + zxy = 3z = z$, значит, $x + y + xy$ – точная верхняя грань $\{x, y\}$. ∎

Определение 4.14. Булево кольцо есть кольцо, все элементы которого – идемпотенты.

Замечание 4.15. Пусть R – булево кольцо. Тогда R имеет характеристику 2. В самом деле, в таком кольце $2 = 2^2 = (1 + 1)^2 = 1 + 1 + 2$.

Следующая фундаментальная теорема доказана американским математиком Маршаллом Стоуном в 1930-е годы (это тот же самый Стоун, которому принадлежит теорема Стоуна-Вейерштрасса о приближении непрерывных функций полиномиальными).

Теорема 4.16: Пусть R – булево кольцо. Тогда его решетка идемпотентов – булева алгебра. Более того, любая булева алгебра получается таким образом.

Доказательство: Наличие единицы, нуля и дополнения в такой решетке очевидно: 1 есть 1 кольца, 0 есть 0, а дополнение к x это $1-x$ (проверьте это). Чтобы проверить дистрибутивность, вычисляем

$$\begin{aligned}(a\wedge c)\vee(a\wedge c) =& ac+bc+abc=(a\vee b)\wedge c,\\ (a\vee c)\wedge(b\vee c) =& (a+c+ac)(b+c+bc)=ab+ac+abc+bc+c+bc+ac+2abc=\\ =& ab+ac+abc=(a\wedge b)\vee c.\end{aligned}$$

Мы доказали, что решетка идемпотентов в булевом кольце есть булева алгебра. Чтобы доказать, что каждая булева алгебра получается таким образом, напишем в булевой алгебра A произведение формулой $xy := x\wedge y$, а сумму $x+y := x\triangle y$, где $x\triangle y := (x\vee y)\wedge\neg(x\wedge y)$ обозначает операцию в булевой алгебре, известную как "симметрическая разность" или же "исключающее ИЛИ".

Осталось проверить, что это будет булево кольцо. Ассоциативность и коммутативность умножения очевидна, а равно и коммутативность симметрической разности. Единица и 0 в булевом кольце те же, что и в алгебре. Дистрибутивность умножения следует из дистрибутивности $\wedge$ и $\vee$, но проверка чуть менее тривиальна. Я рекомендую читателю проделать это вычисление (а также доказательство ассоциативности симметрических разностей) самостоятельно.

Вместо прямого вычисления (которое элементарно, но не слишком красиво) я применю чуть более концептуальный аргумент, основанный на понятии идеала в булевой алгебре.

Определение 4.17. Пусть A – булева алгебра, а $I\subset A$ – подмножество в A. Оно называется **идеалом**, если I замкнуто относительно операций $\vee$, $\wedge$ и $\neg$, и для каждых $a\in A,\xi\in I$, имеет место $a\wedge\xi\in I$.

Замечание 4.18. Отметим, что если булева алгебра A построена по булеву кольцу R, то булевы идеалы в A – то же самое, что обычные идеалы в кольце R (проверьте).

Определение 4.19. Пусть $I\subset A$ – булев идеал. Определим такое соотношение в A, $x\sim_I y$, если для каких-то $\xi,\xi'\in I$, имеем $x\vee\xi=y\vee\xi'$. Легко видеть, что это соотношение эквивалентности, и на факторе $A/\sim_I$ возникает естественная структура булевой алгебры (проверьте это). Такая булева алгебра называется **фактор-алгеброй по булеву идеалу** I, и обозначается A/I.

Замечание 4.20. Проверка того, что $A/\sim_I$ – булева алгебра, ведется так. Сначала на $A/\sim_I$ определяется отношение частичного порядка $\preccurlyeq_I$, индуцированное с A, следующим образом: $a \mod I\preccurlyeq_I b \mod I$, если $a\vee\xi\preccurlyeq b\vee\xi'$ для $\xi,\xi'\in I$. Если $a\vee\xi_1\preccurlyeq b\vee\xi_1'$ и $b\vee\xi_2\preccurlyeq a\vee\xi_2'$, это дает

$$a\vee\xi_1\vee\xi_2\preccurlyeq b\vee\xi_1'\vee\xi_2\preccurlyeq a\vee\xi_1'\vee\xi_2'$$

добавляя $\vee\xi_1\vee\xi_2\vee\xi_1'\vee\xi_2'$ к обоим частям, получаем

$$a\vee\xi_1\vee\xi_2\vee\xi_1'\vee\xi_2'\preccurlyeq b\vee\xi_1\vee\xi_2\vee\xi_1'\vee\xi_2'\preccurlyeq a\vee\xi_1\vee\xi_2\vee\xi_1'\vee\xi_2'$$

то есть $a\vee\xi_1\vee\xi_2\vee\xi_1'=b\vee\xi_1\vee\xi_2\vee\xi_1'$ и $\preccurlyeq_I$ антисимметрично; транзитивность этого отношения очевидна. Существование точной нижней и верхней грани и дистрибутивность в A/I индуцируется с аналогичных соотношений в A.

Замечание 4.21. Булевы идеалы в A/I взаимно-однозначно соответствуют булевым идеалам в A, содержащим I (проверьте это).

Определение 4.22. Булев идеал $I \subset A$ называется **максимальным**, если $I \neq A$, и не существует иделов I', промежуточных между I и A, то есть удовлетворяющих $I \subsetneq I' \subsetneq A$.

Замечание 4.23. Здесь все то же самое, что и в обычной коммутативной алгебре с идеалами и максимальными идеалами.

Пример 4.24: Пусть $A, \preccurlyeq$ – булева алгебра, а $a \in A$ – какой-то элемент. Тогда множество $I_A := \{b \in A \ \mid \ b \preccurlyeq a\}$ есть идеал в A.

Следствие 4.25: Если $I \subset A$ – максимальный идеал, то булева алгебра A/I состоит из двух элементов. ■

Если a принадлежит максимальному идеалу, то $\neg a$ не принадлежит ему. С другой стороны, стандартный аргумент, доказывающий существование максимальных идеалов, показывает, что каждый элемент булевой алгебры лежит в каком-то максимальном идеале. Это доказывает следующее полезное утверждение.

Утверждение 4.26: Пусть A – булева алгебра, а $\mathfrak{S}$ – множество всех максимальных идеалов A. Рассмотрим произведение булевых алгебр $\prod_{I\in\mathfrak{S}} A/I$ и пусть $A \xrightarrow{\Psi} \prod_{I\in\mathfrak{S}} A/I$ – естественное отображение. Тогда Ψ есть инъективный гомоморфизм булевых алгебр. ■

Теперь мы можем доказать теорему 4.16 об эквивалентности булевых алгебр и колец. Чтобы завершить ее доказательство, нам нужно было проверить два тождества в булевых алгебрах: ассоциативность симметрической разности, и дистрибутивность $\wedge$ относительно симметрической разности. В булевой алгебре из двух элементов эти тождества тривиально выполняются (проверьте), а в силу предыдущего утверждения, этого уже достаточно.

4.3. Аддитивная мера как метрика на булевой алгебре

Следующее определение мы уже вводили для кольца многогранников. В этой лекции мы требуем от меры вдобавок ко всему прочему неотрицательности.

Определение 4.27. Пусть A есть булева алгебра, а $\mu: \ A \longrightarrow [0, \infty]$ функция, принимающая неотрицательные значения или ∞. Такая функция называется **положительной, конечно-аддитивной мерой**, если выполнено $\mu(a \vee b) + \mu(a \wedge b) = \mu(a) + \mu(b)$.

На протяжении этой лекции, я буду считать, что все меры неотрицательны и конечно-аддитивны.

Замечание 4.28. Для $a \wedge b = 0$ (то есть соответствующие множества не пересекаются) имеем $\mu(a \vee b) = \mu(a) + \mu(b)$. В частности, мера объединения двух множеств не меньше, чем мера каждого из них.

Замечание 4.29. Из этого следует, что μ монотонна по отношению к частичному порядку: если $a \preccurlyeq b$, то $\mu(a) \leqslant \mu(b)$ (проверьте).

Замечание 4.30. Рассмотрим множество I_μ всех $a \in A$ с $\mu(a) = 0$. Легко видеть, что это булев идеал. В самом деле, $\mu(a \vee b) + \mu(a \wedge b) = \mu(a) + \mu(b) = 0$ для $a, b \in I_\mu$. К тому же, для любого x и $a \in I_\mu$, $x \wedge a \preccurlyeq a$, значит $\mu(x \wedge a) \leqslant \mu(a) = 0$ в силу монотонности меры по отношению к частичному порядку.

Теорема 4.31: Пусть μ – аддитивная, неотрицательная мера на булевой алгебре A, а I_μ – идеал всех a с $\mu(a) = 0$. Определим отображение $d: \ (A/I_\mu) \times (A/I_\mu) \longrightarrow [0, \infty]$ формулой $d(a, b) := \mu(a \triangle b)$, где $\triangle$ обозначает симметрическую разность. Тогда d задает метрику на A/I_μ. Более того, булевы операции $\wedge, \vee$ и $\neg$ нерерывны в топологии, заданной такой метрикой.

Доказательство: Симметричность и рефлексивность метрики очевидны. Чтобы доказать неравенство треугольника, я воспользуюсь структурой булева кольца на A/I_μ, построенной в теореме 4.16. Обозначим за $+, \cdot$ операции $\triangle$ и $\wedge$. Из определения симметрической разности и аддитивности μ ясно, что $\mu(x + y) = \mu(x) + \mu(y) - 2\mu(xy) \leqslant \mu(x) + \mu(y)$, что дает неравенство треугольника

$$d(a, b) + d(b, c) = \mu(a - b) + \mu(b - c) \geqslant \mu(a - c) = d(a, c).$$

Чтобы доказать непрерывность $\wedge, \vee$ и $\neg$, достаточно доказать непрерывность кольцевых операций $+, \cdot$: остальные через них выражаются (теорема 4.16). Непрерывность $+$ очевидна, ибо для любой последовательности $\{x_i\}$, сходящейся к x, имеем $d(x_i + y, x + y) = \mu(x_i - x) = d(x_i, x)$, значит, $x_i + y$ сходится к $x + y$. Отмечу, что это частный случай более общего утверждения о метрике на абелевых группах.

Задача 4.32. Пусть G – абелева группа, а $|\cdot|: \ G \longrightarrow [0, \infty]$ – функция, удовлетворяющая $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ и $|-x| = |x|$ и положительная вне $0 \in G$. Тогда формула $d(x, y) = |x - y|$, задает метрику на G, причем сложение и взятие обратного элемента непрерывно в этой метрике.

Чтобы доказать теорему 4.31, осталось убедиться, что умножение в булевом кольце A непрерывно в метрике $d(x, y) = \mu(x + y)$. Возьмем последовательность $\{z_i\}$, сходящуюся к z. Тогда

$$d(xz_i, zx) = \mu(x(z_i - z)) \leqslant d(z, z_i) \tag{4.3.1}$$

в силу неравенства $\mu(a) \geqslant \mu(ab)$, которое следует из монотонности μ. Из равенства (4.3.1) немедленно следует, что xz_i сходится к zx. ■

Замечание 4.33. Условие аддитивности меры на языке булевых колец переписывается как

$$\mu(a + b + ab) + \mu(ab) = \mu(a) + \mu(b)$$

или, для $ab = 0$, $\mu(a + b) = \mu(a) + \mu(b)$.

Утверждение 4.34: Пусть A – булево кольцо, снабженное неотрицательной, аддитивной мерой μ, I_μ – идеал всех $a \in A$ с $\mu(a) = 0$, а $\hat{A}_\mu$ – пополнение A/I_μ по метрике d, определенной выше. Тогда $\hat{A}_\mu$ – тоже булево кольцо.

Доказательство: По определению, $\hat{A}_\mu$ – множество классов эквивалентности последовательностей Коши. Легко видеть, что произведение, сумма последовательностей Коши снова последовательность Коши, и соответствующие операции на $\hat{A}_\mu$ удовлетворяют всем тем же аксиомам, которым удовлетворяет кольцо A, значит, является булевым кольцом. ■

4.4. σ-алгебры и σ-аддитивность

Определение 4.35. σ-алгебра есть кольцо подмножеств, замкнутое относительно счетных объединений.

Замечание 4.36. Это свойство можно сформулировать и на языке булевых алгебр. А именно, булева алгебра $(A, \preccurlyeq)$ является σ-алгеброй, если у каждого счетного подмножества есть точная верхняя грань.

Упражнение 4.37: Докажите, что эти два определения равносильны.

Определение 4.38. Пусть $A \subset 2^S$ – кольцо подмножеств, а μ – конечно-аддитивная, неотрицательная мера. Мера μ называется **σ-аддитивной,** или же **счетно-аддитивной**, если для любого покрытия $\bigcup X_i \supset X$ множества $X \in A$ счетным набором множеств, имеет место $\mu(X) \leqslant \sum \mu(X_i)$.

Замечание 4.39. Пусть A – σ-алгебра, снабженная счетно-аддитивной мерой. Тогда для каждого набора непересекающихся множеств $X_i \in A$, имеет место $\mu(\coprod X_i) = \sum \mu(X_i)$. В самом деле, $\coprod X_i$ содержит любое конечное объединение X_i, и, в силу монотонности меры, удовлетворяет $\mu(\coprod X_i) \geqslant \sum_{i\in\mathfrak{S}} \mu(X_i)$ для любого конечного (а значит, и бесконечного) набора индексов $\mathfrak{S}$. Это дает неравенство $\mu(\coprod X_i) \geqslant \sum \mu(X_i)$ для любой аддитивной, неотрицательной меры. Обратное неравенство следует из σ-аддитивности.

Определение 4.40. σ-алгебра, порожденная набором подмножеств $A \subset 2^S$, есть кольцо подмножеств, порожденных пересечениями, дополнениями и счетными объединениями элементов A.

Замечание 4.41. Если $A \subset 2^{\mathbb{R}^n}$ – алгебра многогранников, то порожденная ей σ-алгебра содержит все открытые множества. Чтобы убедиться в этом, возьмем какое-то открытое множество $U \subset \mathbb{R}^n$ и представим в виде счетного объединения компактов K_i (докажите, что это возможно). Каждая точка $z \in U$ имеет шарообразную окрестность $U \ni z$, содержащуюся в U; вписывая куб в шар, мы получим покрытие U многогранниками, содержащимися в U. Выбирая конечное покрытие у каждого K_i, мы получим счетное покрытие U многогранниками.

Определение 4.42. Пусть M – топологическое пространство. **Борелевская σ-алгебра** есть σ-алгебра, порожденная всеми открытыми множествами.

Замечание 4.43. Мы только что доказали, что кольцо многогранников порождает борелевскую σ-алгебру.

Утверждение 4.44: Пусть $\hat{A}_\mu$ – пополнение A/I_μ, построенное в утверждении 4.34. Предположим, что $\mu(1)$ конечно. Тогда $\hat{A}_\mu$ является σ-алгеброй.

Доказательство: Пусть $X_1, X_2, ...$ – счетный набор непересекающихся элементов $\hat{A}_\mu$. Для доказательства утверждения 4.44, надо продемонстрировать, что у него есть точная верхняя грань. Если последовательность $\{Y_n := \bigcup_{i=1}^n X_i\}$ является последовательностью Коши, ее предел и будет такой точной верхней гранью. Действительно, $a_n := d(Y_n, \bigcup_{i=1}^\infty X_i) = \sum_{i=0}^\infty d(Y_{n+i}, Y_{n+i+1})$ а $\lim_n a_n = 0$ тогда и только тогда, когда Y_n – последовательность Коши.

Поскольку $\mu(1)$ конечно, ряд $\sum \mu(X_i)$ сходится. Значит, $a_n := \mu\left(\bigcup_{i=n}^\infty X_i\right)$ стремится к нулю. С другой стороны, для $k < l$, имеем

$$d(Y_k, Y_l) = \sum_{i=k}^{l} \mu(X_i) \leqslant a_k$$

значит $\{Y_i\}$ – последовательность Коши. ■

4.5. Измеримые множества

Определение 4.45. Пусть $A \subset 2^S$ – кольцо подмножеств S, снабженное счетно-аддитивной, неотрицательной мерой μ, а $R \subset S$ – какое-то подмножество. Мы говорим, что R **имеет меру 0**, если для каждого $\varepsilon > 0$, множество R можно покрыть счетным объединением $X_i \in A$, с $\sum \mu(X_i) < \varepsilon$.

Задача 4.46. Докажите, что счетное объединение множеств меры 0 имеет меру 0.

Задача 4.47. Пусть $S = \mathbb{R}^n$, A – кольцо многогранников, а μ – объем многогранника. Докажите, что

а. • Любое счетное подмножество S имеет меру 0.

б. • $\mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ имеет меру 0.

Определение 4.48. Алгебра измеримых множеств есть σ-алгебра в $\mathbb{R}^n$, порожденная борелевскими множествами и множествами меры 0.

Замечание 4.49. Множества меры нуль образуют булевский идеал в алгебре измеримых множеств (докажите это).

Теорема 4.50: Пусть A – алгебра многогранников в единичном кубе, $\mu = \operatorname{Vol}$ объем, а $\hat{A}_\mu$ – пополнение A/I_μ, построенное в утверждении 4.34. Тогда $\hat{A}_\mu$ изоморфно фактору $\hat{A}/I$ алгебры $\hat{A}$ измеримых множеств по идеалу множеств меры нуль.

Доказательство: Для доказательства теоремы 4.50, достаточно получить каждое борелевское множество как предел последовательности Коши многогранников, и, наоборот, доказать, что любая последовательность Коши в кольце A/I_μ многогранников по модулю вырожденных многогранников сходится к борелевскому множеству.

Шаг 1: В силу замечания 4.43 – содержит все открытые множества. Каждому открытому множеству $S \in A$ положим в соответствие его представителя в $\hat{A}_\mu$. Это задает гомоморфизм колец $A \longrightarrow \hat{A}_\mu$. Поскольку пополнение $\hat{A}_\mu$ является σ-алгеброй, такой гомоморфизм продолжается до гомоморфизма булевых алгебр $\hat{A}/I \xrightarrow{\psi} \hat{A}_\mu$, переводящего точную верхнюю грань счетного набора подмножеств A в точную верхнюю грань их образов.

Шаг 2: По построению, на кольце $\hat{A}_\mu$ задана σ-аддитивная мера $\mu(X) := d(x, \emptyset)$. Определим меру на $\hat{A}/I$ формулой $\mu(X) = \mu(\psi(X))$. Если $\mu(\psi(X)) = 0$, то X есть предел последовательности Коши многогранников X_i с $\lim \mu(X_i) = 0$. Это значит, что X имеет меру 0 (см. шаг 8). Мы получили, что ψ – инъективный гомоморфизм.

Шаг 3: Чтобы доказать, что ψ сюрьективен, осталось убедиться, что $\hat{A}/I$ полно относительно построенной метрики $d(X,Y) := \mu(X \triangle Y)$. В самом деле, $\hat{A}_\mu$ полно, и является пополнением многогранников, но все многогранники лежат в образе ψ.

Шаг 4: Пусть $\{X_i\}$ – последовательность Коши борелевских множеств. Поскольку каждое борелевское множество содержится в пополнении многогранников, можно считать, что X_i - многогранники. Нам надо построить борелевское множество, к которому эта последовательность будет сходиться.

Шаг 5: Заменим $\{X_i\}$ на подпоследовательность такую, что $d(X_i, X_j) < \frac{1}{2^{\min(i,j)}}$. Это можно сделать по определению последовательностей Коши (проверьте это). В этом случае, получаем, что $d(X_i, X_{i+1}) < \frac{1}{2^i}$.

Шаг 6: Тогда $\{Y_n := \bigcup_{i\geqslant n} X_i\}$ – последовательность Коши, эквивалентная $\{X_i\}$. В самом деле, $d(X_n, Y_n) \leqslant d(X_n, X_{n+1}) + d(X_{n+1}, X_{n+2}) + ...$, потому что Y_n есть объединение X_n и всех дополнений $X_{n+i+1}\backslash X_{n+i}$. Значит,

$$d(X_n, Y_n) \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} d(X_{n+i}, X_{n+i+1}) \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+i-1}} = \frac{1}{2^{n-2}}.$$

в силу предыдущего шага.

Шаг 7: Будучи счетным объединением многогранников, множества Y_i борелевские, но это последовательность монотонно убывающих множеств. Тот же самый аргумент, что и выше, доказывает, что $\bigcap Y_i$ является пределом $\{Y_i\}$. Счетное пересечение борелевских множеств - снова борелевское, потому что это дополнение к счетному объединению дополнений. Мы доказали, что σ-алгебра измеримых множеств полна.

Шаг 8: Тот же самый аргумент доказывает, что предел последовательности Коши $\{X_i\}$ многогранников X_i, удовлетворяющих $\lim \mu(X_i) = 0$, имеет меру нуль. Сначала мы заменяем $\{X_i\}$ на быстро сходящуюся последовательность Коши, как в шаге 5, потом на монотонно убывающую последовательность Коши, $\{Y_n := \bigcup_{i\geqslant n} X_i\}$, с

$$\mu(Y_n) = \sum_{i=0}^{\infty} d(X_{n+i}, X_{n+i+1}) \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+i-1}} = \frac{1}{2^{n-2}},$$

и получаем, что предел $\bigcap Y_i$ этой последовательности покрывается множеством Y_n произвольно малой меры $\mu(Y_n) \leqslant \frac{1}{2^{n-2}}$. ∎

Определение 4.51. На алгебре $\hat{A}_\mu$ по построению задана σ-аддитивная, неотрицательная мера. В силу выше доказанного изоморфизма мера определена на алгебре измеримых множеств, и счетно-аддитивна там. Эта мера называется **мерой Лебега**.