5. Теория меры, лекция 5: измеримые функции

Мера и интеграл – понятия весьма близкие. Мера множества есть интеграл его характеристической функции. Наоборот, если на пространстве задана мера, можно говорить об интеграле функции. В этой лекции я объясню, как получить из меры на пространстве интеграл.

Чтобы получить алгебру измеримых множеств, берут алгебру многогранников, и находят ее пополнение по метрике, полученной из меры симметрической разности. Аналогичным образом можно построить пространство измеримых функций: надо взять предел ступенчатых функций по метрике, которая получается из интеграла. Такая метрика называется L^1-метрикой.

5.1. Измеримые функции и интеграл Лебега

5.1.1. Определение интеграла

Определение 5.1. **Мера** на сигма-алгебре A есть счетно-аддитивная функция $A \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$. **Мера** на топологическом пространстве есть мера на его борелевской алгебре.

Определение 5.2. Мера μ на σ-алгебре A называется **σ-конечной**, если для любого $Z \in A$, можно покрыть Z объединением $Z_i \in A$, $Z \subset \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} Z_i$, где все Z_i имеют конечную меру.

Замечание 5.3. Мера Лебега, очевидно, σ-конечна. На протяжении этой лекции (и везде в дальнейшем, где требуется применить интеграл), все меры предполагаются σ-конечными.

Определение 5.4. Пусть (M, μ) есть пространство с заданной на нем мерой. Функция $M \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ называется **измеримой**, если прообраз каждого борелевского множества измерим.

Замечание 5.5. Непрерывные функции, очевидно, измеримы.

Задача 5.6. Пусть $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ – функция, такая, что прообраз любого отрезка измерим. Докажите, что f тоже измерима.

Определение 5.7. Рассмотрим множество V всех измеримых функций на (M, μ) со значениями в $\mathbb{R}^{\geqslant 0}$. **Интеграл Лебега**, или просто **интеграл** есть функционал $V \xrightarrow{\int_\mu} [0, \infty]$, обладающий следующими свойствами.

1. Линейность: $\int_\mu f + g = \int_\mu f + \int_\mu g$, и $\int_\mu \lambda f = \lambda \int_\mu f$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Неотрицательность: $\int_\mu f \geqslant 0$ для каждой функции $f \geqslant 0$, причем равенство имеет место только если $f = 0$ вне множества меры 0.

3. Совместимость с мерой: если χ – характеристическая функция измеримого множества Z с конечной мерой, то $\int_\mu \chi = \mu(Z)$.

4. σ-аддитивность: если $f = \sum_{i=0}^\infty f_i$ разложение функции в бесконечную сумму неотрицательных функций, то $\int_\mu f = \sum_i \int_\mu f_i$.

Теорема 5.8: Интеграл существует, и определен однозначно, исходя из этих четырех аксиом.

Мы докажем эту теорему в следующем разделе.

Определение 5.9. **Интеграл измеримой функции** $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ определяется как

$$\int_\mu f = \frac{1}{2}\left[\int_\mu (|f| + f) - \int_\mu (|f| - f)\right].$$

Эта формула задает линейный функционал на пространстве всех измеримых функций, для которых $\int_\mu |f|$ конечен (проверьте это). Интеграл принимает конечное значение, если оба члена в квадратных скобках конечны, он равен ∞ если первый из них бесконечен, а второй конечен, и $-\infty$, если первый конечен, а второй бесконечен. Если они оба равны ∞, интеграл не определен.

Можно было бы сразу задать интеграл как линейный функционал на пространстве измеримых функций, но если позволить интегралу принимать значение $\pm\infty$, будет трудно говорить о линейности.

5.1.2. L^1-норма на пространстве ступенчатых функций

Идея доказательства теоремы 5.8 такая же в точности, как и определение меры измеримого множества, исходя из сигма-аддитивной меры на алгебре многогранников. Измеримые множества можно построить как предел многогранников, а измеримые функции - как предел ступенчатых. Интеграл можно вычислить с помощью предельного перехода, в точности так же, как мы делали с мерой.

Определение 5.10. **Ступенчатая функция** на множестве с заданной на нем σ-алгеброй $\mathfrak{A}$ есть функция f, принимающая счетное (или конечное) число значений, причем $f^{-1}(c)$ лежит в $\mathfrak{A}$ для любого c.

Определение 5.11. Пусть $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ – ступенчатая функция на пространстве (M, μ) с мерой, $\{c_i\}$ – множество ее значений, а $Z_i := f^{-1}(c_i)$ – соответствующие подмножества M. Определим **интеграл** f как сумму $\int_\mu f := \sum_i c_i \mu(Z_i)$. Интеграл принимает значения в $[0, \infty]$,

Замечание 5.12. Очевидно, интегралы ступенчатых функций удовлетворяют условиям 1-4 из определения 5.7 (проверьте это).

Определение 5.13. **Почти всюду** значит "вне множества меры 0".

Определение 5.14. Определим **L^1-норму** на пространстве ступенчатых функций формулой

$$\|f\| := \int_\mu |f|.$$

Она принимает значения в $[0, \infty]$. Определим **L^1-метрику** формулой $d(f, g) := \|f - g\|$.

Замечание 5.15. Строго говоря, и L^1-норма и L^1-метрика не являются нормой и метрикой на пространстве ступенчатых функций: они зануляются на функциях, которые равны нулю почти всюду. Корректнее было бы сказать, что это норма и метрика на факторпространстве ступенчатых функций по пространству ступенчатых функций, которые равны нулю почти всюду.

5.1.3. Измеримая функция как предел ступенчатых

Определение 5.16. Пусть $f_i : M \longrightarrow \mathbb{R}$ – последовательность функций. Напомним, что f_i **равномерно сходится** к $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется N такой, что $|f - f_i| < \varepsilon$ при $i > N$.

Предложение 5.17: Пусть f – измеримая функция на пространстве M с σ-алгеброй. Тогда существует последовательность $\{f_i\}$ ступенчатых функций, которая равномерно сходится к f. Если, к тому же, само пространство M имеет конечную меру, то f_i есть последовательность Коши относительно L^1-метрики, и все такие последовательности Коши эквивалентны.

Доказательство: Обозначим за $\Psi_n(f)$ функцию вида $x \xrightarrow{f_n} \frac{1}{n}[nf(x)]$, где [...] обозначает целую часть. Легко видеть, что f_n есть последовательность ступенчатых функций, причем $\|f - f_n\| \leqslant 1/n$, значит, f_n равномерно сходится к f.

Поскольку $\|f_i - f_{i+j}\| < \frac{1}{n}\mu(M)$. $\{f_i\}$ есть последовательность Коши.

Если $\{f_i\}$, $\{f_i'\}$ – две такие последовательности Коши, то $\lim_i \sup_M |f_i - f_i'| = 0$. Но поскольку $\int_\mu |f_i - f_i'| \leqslant \mu(M) \sup_M |f_i - f_i'|$, из этого следует, что $\lim_i \|f_i - f_i'\| = 0$, то есть эти последовательности Коши эквивалентны. ■

Определение 5.18. Пусть f – измеримая функция на пространстве M с σ-алгеброй и сигма-аддитивной мерой μ, такой, что $\mu(M) < \infty$. Определим $\int_\mu f$ как $\lim_i \int_\mu f_i$, где $\{f_i\}$ – последовательность функций, равномерно сходящихся к f.

Замечание 5.19. Легко видеть, что $\int_\mu f$ удовлетворяет условиям 1–4 из определения интеграла (докажите это).

Замечание 5.20. Единственность интеграла, заданного условиями 1–4, тоже очевидна. В самом деле, если $0 < f - f_i < \varepsilon$, имеем $0 < \int_\mu (f - f_i) < \varepsilon\mu(M)$ (проверьте это), а значит, $\lim_i \int_\mu f_i = \int_\mu f$. Но $\int_\mu f_i$ задан условиями 1–4 однозначно, потому что f_i ступенчатая.

Замечание 5.21. Пусть M разбито в счетное объединение непересекающихся подмножеств конечной меры, $M = \coprod K_i$. Для каждой функции $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$, напишем $f = \sum f_i$, где $f_i = f$ на K_i и нулю вне K_i. Интеграл f_i хорошо определен в силу вышеизложенного. Положим $\int_\mu f := \sum \int_\mu f_i$. Легко видеть, что таким образом определенный интеграл удовлетворяет условиям 1-4 из определения интеграла. В такой ситуации, интеграл тоже однозначно задается этими условиями. В самом деле, в силу счетной аддитивности интеграла, $\int_\mu f = \sum \int_\mu f_i$, а $\int_\mu f_i$ однозначно определяется этими условиями, как мы уже видели.

5.2. Поточечный предел измеримых функций

5.2.1. Поточечный предел функций

Определение 5.22. Последовательность $\{f_i\}$ функций **поточечно сходится** к f, если

$$\lim_i f_i(x) = f(x)$$

для любого x.

Пусть A – топологическое пространство. Пространство функций на M со значениями в A с топологией поточечной сходимости есть произведение M копий A, с топологией произведения, которая в этой ситуации называется **тихоновской топологией**. Теорема Тихонова утверждает, что для любого компактного A, произведение любого числа копий A с собой компактно. Это нетривиальная теорема, которая существенно использует теорию множеств, в частности, аксиому выбора. Доказательство Тихонова было получено, когда тому было 22 года, но старшие товарищи не могли поверить, что это может быть правдой, и не позволяли опубликовать его теорему почти 10 лет.

Любопытно, что Коши, который первый задумался о сходимости функций, не видел разницы между поточечной и равномерной сходимостью; среди прочего, он считал, что поточечный предел непрерывных функций непрерывен (найдите контрпример). Впервые осознал нетривиальность этого понятия, видимо, Дирихле, но четкие формулировки всех нужных определений и теорем принадлежат Вейерштрассу.

5.2.2. Поточечный предел и интеграл

Поточечный предел измеримых функций всегда измерим. Увидеть это нетрудно: значала надо проверить, что он измерим для монотонной последовательности измеримых функций, а потом убедиться, что предел любой последовательности f_i получается как предел $g_n := \sup_{i>n} f_i$, причем последователность $\{g_n\}$ невозрастает, и каждое g_n получено как предел неубывающей последовательности:

$$g_n = \lim_N \sup_{i=n+1}^N f_i$$

(см. теорема 5.26).

Оказывается, что поточечный предел ограниченных функций перестановочен с интегралом. Сначала докажем вспомогательную лемму.

Лемма 5.23: Пусть f – измеримая неотрицательная функция на (M, μ), и $\int_\mu f < \infty$. Тогда

(i) Для любой последовательности вложенных измеримых множеств $X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset ...$, с $\bigcap X_i = \emptyset$, имеем $\lim_i \int_\mu f\Big|_{X_i} = 0$. Здесь $f\Big|_{X_i}$ означает **ограничение** f на X_i, то есть функцию, которая равна f на X_i, и нулю вне X_i.

(ii) $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\mu f\Big|_{f^{-1}([0,\varepsilon])} = 0$.

Доказательство: Для ступенчатой функции, и первое и второе утверждение очевидны (проверьте это). Поскольку интеграл определяется через приближение измеримой функции ступенчатыми, лемму достаточно проверить, когда f ступенчатая (обоснуйте). ■

Лемма 5.24: Пусть $\{f_i\}$ – невозрастающая последовательность неотрицательных измеримых функций на M, которая поточечно сходится к 0. Предположим, что $\int_M f_i < \infty$. Тогда $\lim_i \int_\mu f_i = 0$.

Доказательство: В силу монотонности f_i, для каждого $\varepsilon > 0$ имеем цепочку вложений

$$f_1^{-1}([0,\varepsilon[) \subset f_2^{-1}([0,\varepsilon[) \subset f_3^{-1}([0,\varepsilon[) \subset ...$$

причем $\bigcup_i f_i^{-1}([0,\varepsilon[) = M$ в силу того, что f_i поточечно сходится к 0. Из леммы 5.23 (i) получаем, что для любой интегрируемой функции g,

$$\lim_i \int_\mu g\Big|_{f_i^{-1}([\varepsilon,\infty])} = 0. \quad (5.2.1)$$

В силу леммы 5.23 (ii)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\mu f_i\Big|_{f_i^{-1}([0,\varepsilon])} = 0 \tag{5.2.2}$$

Поскольку f_i не возрастает, имеем

$$\int_\mu f_i \leqslant \int_\mu f_i\Big|_{f_i^{-1}([0,\varepsilon])} + \int_\mu f\Big|_{f_i^{-1}([\varepsilon,\infty])}$$

Значит, (5.2.1) и (5.2.2) дает $\lim_i \int_\mu f_i = 0$. ■

Лемма 5.25: Пусть $\{f_i\}$ – неубывающая последовательность измеримых функций, причем $\int_M |f_i| < \infty$. Тогда $f := \sup_i f_i$ тоже измеримо, и $\lim_i \int_\mu |f - f_i| = 0$.

Доказательство: Измеримость f очевидна, ибо $f^{-1}(]-\infty, c[) = \bigcup_i f_i^{-1}(]-\infty, c[)$, значит, прообраз любого борелевского множества измерим (проверьте это). Последовательность $\{f - f_i\}$ положительных функций монотонно убывает и поточечно сходится к нулю, так что $\lim_i \|f - f_i\| = 0$ в силу леммы 5.24. ■

Теорема 5.26: Пусть $\{f_i\}$ – последовательность измеримых функций на (M,μ), принимающих значения в отрезке $[-C, C]$, которая поточечно сходится к f, причем мера M конечна. Тогда f тоже измерима, и $\int_\mu f = \lim_i \int_\mu f_i$.

Доказательство. Шаг 1: Пусть $g_n := \inf_{k\geqslant n} f_k$. Каждая из функций g_n получена как предел невозрастающей последовательности измеримых функций,

$$g_m = \lim_m \min_{i=n}^{n+m} f_i,$$

следовательно, по лемме 5.25, измерима.

Шаг 2: Пусть $\{f_i\}$ – последовательность ограниченных функций в $L^1(M)$, поточечно сходящаяся к нулю, причем $\lim_i \int_\mu f_i < \infty$. Тогда $\lim_i \int_\mu f_i = 0$.

Утверждение шага 2 доказывается так. Воспользовавшись неравенством

$$\left|\int_\mu f_i\right| \leqslant \int_\mu |f_i|,$$

(проверьте его), находим, что достаточно убедиться, что $\lim_i \int_\mu |f_i| = 0$. Значит, можно с самого начала предположить, что $f_i > 0$. Пусть теперь $h_n := \sup_{k\geqslant n} f_k$.

Поскольку h_n – невозрастающая последовательность, которая поточечно сходится к нулю, имеем $\lim_i \int_\mu h_i = 0$ в силу леммы 5.24. С другой стороны, $h_n \geqslant f_n$, что дает

$$0 \leqslant \int_\mu f_n \leqslant \int_\mu h_n.$$

Значит, $\lim_i \int_\mu f_i = 0$.

Шаг 3: Поскольку последовательность $\{g_n\}$ неубывающая, ее предел тоже измерим, снова по лемме 5.25. Но этот предел равен f (проверьте). Получаем

$$\int_\mu f = \lim_i \int_\mu f_i + \lim_i \left[\int_\mu f - f_i\right].$$

Второй из пределов в этом уравнении равен нулю в силу предыдущего шага, значит, $\int_\mu f = \lim_i \int_\mu f_i$. ■

Замечание 5.27. Отметим, что теорема 5.26 неверна, если не предполагать, что функции f_i ограничены (постройте контпример). Ограниченность используется на шаге 2 доказательства: если f_i не ограниченны, функция $h_n := \sup_{k \geqslant n} f_k$ не обязательно имеет ограниченный интеграл, и применение леммы 5.24 будет неоправданным.

5.3. Пространство интегрируемых функций

5.3.1. $L^1(M)$-норма и метрика

Пусть (M, μ) – пространство с сигма-алгеброй и счетно-аддитивной мерой.

Определение 5.28. Измеримая функция f называется **интегрируемой**, если $\int_\mu |f| < \infty$.

Замечание 5.29. Поскольку сумма интегрируемых функций снова интегрируема (проверьте это), интегрируемые функции образуют векторное пространство.

Определение 5.30. Скажем, что функция f **равна нулю почти всюду**, если $f = 0$ вне множества меры 0.

Упражнение 5.31: Проверьте, что для функции, которая равна нулю почти всюду, $\int_\mu f = 0$.

Определение 5.32. Пространство $L^1(M)$ определяется как пространство интегрируемых функций по модулю функций, которые равны нулю почти всюду. Это пространство называется **пространство интегрируемых функций**.

Определение 5.33. L^1**-норма** на пространстве интегрируемых функций записывается как

$$\|f\| := \int_\mu |f|.$$

Замечание 5.34. Определим L^1**-метрику** на пространстве $L^1(M)$ формулой $d_{L^1}(f, g) := \|f - g\|$.

Упражнение 5.35: Проверьте, что это действительно норма и метрика.

5.3.2. Полнота $L^1(M)$

В этом разделе я докажу, что $L^1(M)$ полно. Эвристически говоря, это должно следовать из теоремы Тихонова: пространство ограниченных функций в топологии поточечной сходимости компактно, а из поточечной сходимости следует сходимость в L^1-метрике, что видно из теоремы 5.26.

У этого подхода есть два минуса: во-первых, теорема Тихонова сложная и страшно неконструктивная, а во-вторых, требуется ограниченность функций. Традиционное доказательство немного длиннее, но не имеет этих недостатков. Оно основано на той же идее, что и доказательство полноты кольца измеримых множеств: предел последовательности $\{f_i\}$ заменяется на предел невозрастающей последовательности $g_n := \sup_{i>n} f_i$, а каждый из g_n является пределом неубывающей последовательности

$$g_n = \lim_N \sup_{i=n+1}^{N} f_i.$$

В дальнейшем, нам понадобится следующее предложение.

Предложение 5.36: Пусть $\{f_i\}$ – последовательность интегрируемых функций, причем $\|f_i - f_{i+1}\| = \alpha_i$. Предположим, что ряд $\sum \alpha_i$ сходится. Обозначим за g функцию $\sup_i f_i$. Тогда $\|g - f_n\| < \sum \alpha_i$, для любого n.

Доказательство. Шаг 1: Пусть a, b - интегрируемые функции, а $g = max(a,b)$. Поскольку $|g - a| \leqslant |a - b|$, имеем $\|a - g\| \leqslant \|a - b\|$.

Шаг 2: Обозначим за g_n функцию $\max_{i=1}^n f_i$. Тогда $\|g_n, f_n\| \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i$. Доказательство этого утверждения ведется по индукции; пусть это уже верно для n. Поскольку $g_n = \max(g_{n-1}, f_n)$, в силу предыдущего шага, неравенства треугольника и предположения индукции имеем

$$\|g_n - f_n\| \leqslant \|g_{n-1} - f_n\| \leqslant \|g_{n-1} - f_{n-1}\| + \alpha_{n-1} \leqslant \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i + \alpha_{n-1}.$$

Шаг 3: Для любого n, $\{g_i - f_n\}$ – неубывающая последовательность, поточечно сходящаяся к g. В силу предложения леммы 5.24,

$$\|g - f_n\| = \int_\mu (g - f_n) = \lim_i \int_\mu (g_i - f_n) = \lim_i \|g_i - f_n\|.$$

Как доказано на шаге 2, $\|g_k - f_n\| < \sum \alpha_i$ для всех k, переходя к пределу в L^1-топологии, получаем, что $\|g - f_n\| < \sum \alpha_i$. ■

Теорема 5.37: Пространство $L^1(M)$ интегрируемых функций на (M, μ) полно относительно L^1-метрики.[1]

Доказательство. Шаг 1: Пусть $\{f_i\}$ – поточечно сходящаяся последовательность интегрируемых функций, а f – ее поточечный предел. Предположим, что $\{f_i\}$ монотонна. В силу леммы 5.24, $\lim_i \int_\mu |f - f_i| = 0$, значит, f есть предел f_i в смысле L^1-метрики.

Шаг 2: Предположим, что $\{f_i\}$ – неубывающая последовательность. Положим $\tilde{f} := \sup_i f_i$. Поскольку $\{f_i\}$ – последовательность Коши, $\int_\mu |f_i| < C$ для какой-то константы $C > 0$. Значит, множество Z, где $\tilde{f} = \infty$, имеет меру 0 (проверьте это). Определим функцию f, положив $f = \tilde{f}$ вне Z, и $f = 0$ на Z. В силу предыдущего шага, f есть предел f_i в смысле L^1-метрики.

Шаг 3: Заменим $\{f_i\}$ на подпоследовательность, которая удовлетворяет $\|f_i - f_{i-1}\| < \frac{1}{2^i}$. Пусть $g_n := \inf_{k \geqslant n} f_k$. В силу предложения 5.36,

$$\|g_n - f_n\| \leqslant \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + ... = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Значит, $\{g_i\}$ – последовательность Коши, эквивалентная $\{f_i\}$. Но эта последовательность уже монотонна, и ее предел мы построили на шаге 2. ■

[1] Другими словами, оно является банаховым пространством.