

**НМУ, теория Морса. Листок 1.**  
**Критические точки и их индексы. 25.09.2010.**

**Задача 1.** Докажите, что любая гладкая функция  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$  всегда имеет чётное число критических точек, если они все невырождены.

**Задача 2.** Пусть  $V$  линейное пространство симметрических трёхдиагональных  $n \times n$ -матриц. Рассмотрим в  $V$  подмножество  $M_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \subset V$  матриц с фиксированными собственными значениями  $\lambda_1 > \dots > \lambda_n$ . Докажите, что для собственных значений в общем положении  $M_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$  — гладкое многообразие.

**Задача 3.** Рассмотрим на многообразии  $M_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$  из предыдущей задачи функцию  $f(X) = \text{tr}(KX)$ , где  $K = \text{diag}(1, 2, \dots, n)$ . Найдите критические точки функции  $f$  и их индекс.