ЛЕКЦИЯ 1

Краткое содержание. Теорема Брауэра в размерностях 1 и 2.

n-мерным шаром мы назовем множество последовательностей из n действительных чисел $B_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1^2 + \dots + x_n^2\}$. Отображение $f : B_n \to B_n$ представляет собой, соответственно, набор функций $f_1, \dots, f_n : B_n \to \mathbb{R}$, которые для каждого набора $x = (x_1, \dots, x_n) \in B_n$ удовлетворяют неравенству $f_1(x)^2 + \dots + f_n(x)^2 \le 1$. Отображение f будем называть непрерывным, если все функции $f_1, \dots, f_n$ непрерывны: $\lim_{y\to x} f_i(y) = f_i(x)$.

Теорема (Брауэра). *Пусть $f : B_n \to B_n$ — непрерывное отображение. Тогда существует точка $x \in B_n$ такая, что $f(x) = x$.*

Доказательство теоремы Брауэра для $n = 1$. B_1 это отрезок $[-1, 1]$. Отображение f это непрерывная функция на этом отрезке, принимающая значения от -1 до 1. Рассмотрим два множества: $M_+ = \{x \in [-1, 1] \mid x > f(x)\}$ и $M_- = \{x \in [-1, 1] \mid x < f(x)\}$. Очевидно, $M_+ \cap M_- = \varnothing$. Предположим, что теорема Брауэра для $n = 1$ неверна; тогда $[-1, 1] = M_+ \cup M_-$ и, кроме того, оба множества непусты: $1 \in M_+$ и $-1 \in M_-$.

Рассмотрим число $a = \sup M_-$. Прежде всего заметим, что поскольку функция f непрерывна, множество M_+ открыто: для каждой точки $b \in M_+$ существует такое число $\varepsilon > 0$, что $(b - \varepsilon, b + \varepsilon) \cap [-1, 1] \subset M_+$. Отсюда вытекает, что $a \notin M_+$ и, в частности, $a < 1$. Следовательно $a \in M_-$. Но M_- тоже открыто (в силу той же непрерывности f), то есть существует такое $\varepsilon > 0$, что $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap [-1, 1] \subset M_-$. Поскольку $a < 1$, множество $L = (a, a + \varepsilon) \cap [-1, 1]$ непусто. Всякий его элемент $c \in L$ принадлежит M_- и больше a, что противоречит определению a как точной верхней грани. □

Для доказательства теоремы Брауэра для $n = 2$ нам потребуется понятие степени отображения из окружности в окружность. Окружностью мы будем для краткости называть единичную окружность с центром в начале координат: $S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Расстоянием $\varrho(a, b)$ между двумя точками $a, b \in S^1$ назовем длину кратчайшей дуги окружности с концами в этих точках. Отображение $g : S^1 \to S^1$ назовем непрерывным, если $\forall a \in S^1\, \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall b \in S^1\, \varrho(a, b) < \delta \Longrightarrow \varrho(g(a), g(b)) < \varepsilon$ (определение точно такое же, как для функций одной действительной переменной, только вместо $|b - a|$ пишем $\varrho(a, b)$). Заметим, что в определении непрерывности квантор $\forall \varepsilon > 0$ стоит после $\forall a \in S^1$, т.е. величина δ может зависеть не только от ε, но и от точки a. Отображение $g : S^1 \to S^1$ называется равномерно непрерывным, если при заданном ε можно выбрать одно и то же δ для всех точек a: $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall a \in S^1\, \forall b \in S^1\, \varrho(a, b) < \delta \Longrightarrow \varrho(g(a), g(b)) < \varepsilon$ (опять-таки, определение такое же, как для функций действительной переменной).

Лемма 1. *Непрерывное отображение окружности в окружность равномерно непрерывно.*

Доказательство. Предположим, что лемма неверна. Тогда существует число $\varepsilon > 0$ и последовательности $a_n = (x_n, y_n), b_n = (z_n, t_n) \in S^1$ такие, что $\varrho(a_n, b_n) < 1/n$ и $\varrho(g(a_n), g(b_n)) > \varepsilon$. Последовательности координат x_n, y_n, z_n, t_n лежат на отрезке $[-1, 1]$ и, следовательно, можно выбрать такую возрастающую последовательность индексов $n_1, n_2, \dots$, что все четыре последовательности $x_{n_k}, y_{n_k}, z_{n_k}, t_{n_k}$ сходятся — соответственно, к точкам x, y, z, t. Поскольку $x_n^2 + y_n^2 = 1 = z_n^2 + t_n^2$ (точки a_n и b_n лежат в S^1), имеют место равенства $x^2 + y^2 = 1 = z^2 + t^2$, то есть точки $a \stackrel{\text{def}}{=} (x, y)$ и $b \stackrel{\text{def}}{=} (z, t)$ также лежат в S^1. Несложная проверка показывает, что $\lim_{n\to\infty} \varrho(a, a_n) = \lim_{n\to\infty} \varrho(b, b_n) = 0$. Поскольку $\lim_{n\to\infty} \varrho(a_n, b_n) = 0$ и имеет место неравенство $0 \le \varrho(a, b) \le \varrho(a, a_n) + \varrho(a_n, b_n) + \varrho(b_n, b)$ (докажите!), получается, что $\varrho(a, b) \to 0$ при $n \to \infty$. Но $\varrho(a, b)$ от n не зависит, поэтому $\varrho(a, b) = 0$, то есть $a = b$.

Тем самым последовательности a_n и b_n имеют общий предел $a = b \in S^1$. Поскольку $\varrho(g(a_n), g(b_n)) > \varepsilon$, для каждого n имеет место либо неравенство $\varrho(g(a_n), g(a)) > \varepsilon/2$, либо неравенство $\varrho(g(b_n), g(a)) > \varepsilon/2$. Это противоречит непрерывности отображения g в точке a. □

Рассмотрим теперь непрерывное отображение $g : S^1 \to S^1$; согласно лемме, существует такое δ, что если $\varrho(a, b) < \delta$, то $\varrho(g(a), g(b)) < \pi$ (меньше половины длины окружности). Разобьем окружность точками $a_1, \dots, a_N$ на дуги размером меньше δ и положим $\deg(g; a_1, \dots, a_N) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{N} \pm\varrho(g(a_i), g(a_{i+1}))$; здесь по определению $a_{N+1} = a_1$, а знак выбирается $+$, если кратчайшая дуга от $g(a_i)$ к $g(a_{i+1})$ идет против часовой стрелки, и $-$ в противном случае. Отметим такие свойства величины deg:

- $\deg(g; a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Индукцией по s нетрудно проверить, что $\sum_{i=1}^{s} \pm\varrho(g(a_i), g(a_{i+1})) = \pm\varrho(g(a_1), g(a_{s+1})) + \ell_s$, где $\ell_s \in \mathbb{Z}$. Но $a_{N+1} = a_1$, откуда вытекает утверждение. $\square$

- Если между a_i и a_{i+1} вставить еще одну точку, a', то значение степени не изменится: $\deg(g; a_1, \dots, a_i, a', a_{i+1}, \dots, a_N) = \operatorname{ind}(g; a_1, \dots, a_N)$. Доказательство очевидно.
- Значение $\operatorname{ind}(g; a_1, \dots, a_N)$ не зависит от $a_1, \dots, a_N$, а только от отображения g.

  Доказательство. Рассмотрим две последовательности, $a_1, \dots, a_N \in S^1$ и $b_1, \dots, b_M \in S^1$, для которых $\varrho(a_i, a_{i+1}) < \delta$ и $\varrho(b_i, b_{i+1}) < \delta$ при всех i. Добавляя точки $b_1, \dots, b_M$ по одной к точкам $a_1, \dots, a_N$, получим последовательность $c_1, \dots, c_{M+N}$. Согласно предыдущему утверждению, $\deg(g; a_1, \dots, a_N) = \deg(g; c_1, \dots, c_{M+N}) = \deg(g; b_1, \dots, b_M)$. $\square$

  Тем самым степень $\deg(g : a_1, \dots, a_N) \stackrel{\text{def}}{=} \deg(g)$ зависит только от g.
- Пусть g_t, $0 \le t \le 1$, — семейство непрерывных отображений $S^1 \to S^1$, непрерывно зависящих от параметра t, $0 \le t \le 1$. Тогда степень g_t от t не зависит.

  Доказательство. Семейство g_t можно интерпретировать как непрерывное отображение $g : S^1 \times [0,1] \to S^1$. Такое отображение равномерно непрерывно — доказательство такое же, как для отображений $S^1 \to S^1$. Это означает, что найдется конечное множество точек $a_1, \dots, a_N \in S^1$ и $t_1, \dots, t_M \in [0,1]$ такие, что если x и y лежат на дуге $a_i a_{i+1}$, а s_1 и s_2 — на отрезке $[t_j, t_{j+1}]$, то $\varrho(g_{s_1}(x), g_{s_2}(y)) < \pi$. Следовательно, $\deg(g_t; a_1, \dots, a_N)$ определен для любого t. Из непрерывности g вытекает, что каждое слагаемое $\pm\varrho(g_t(a_i), g_t(a_{i+1}))$ в сумме, определяющей степень, зависит от t непрерывно (знак меняется только когда слагаемое равно нулю). Следовательно, $\deg(g_t)$ зависит от t непрерывно. Поскольку степень всегда является целым числом, она постоянна. $\square$

Доказательство теоремы Брауэра для $n = 2$. Пусть утверждение теоремы неверно: $f(x) \neq x$ для всех $x \in B_2$. Тогда можно определить отображение $g : B_2 \to S^1$ формулой $g(x) = \frac{x - f(x)}{|x - f(x)|}$ (в знаменателе — длина двумерного вектора); очевидно, отображение g непрерывно.

Определим теперь семейство отображений $g_t : S^1 \to S^1$, $0 \le t \le 1$, формулой $g_t(x,y) = g(tx, ty)$ и рассмотрим степень $\deg(g_t)$. Очевидно, $g_0(x,y) = const.$, и из определения индекса немедленно следует, что $\deg(g_0) = 0$. Чтобы вычислить индекс $\deg(g_1)$, заметим, что вектор $g_1(x,y)$ направлен изнутри круга наружу и, следовательно, составляет острый угол с радиус-вектором $h_1(x,y) = (x,y)$. Следовательно, линейная комбинация $H_s(x,y) = sh_1(x,y) + (1-s)g_1(x,y)$ не равна нулю ни при каком $s \in [0,1]$, и можно определить семейство отображений $h_s : S^1 \to S^1$ формулой $h_s(x,y) = H_s(x,y)/|H_s(x,y)|$. Согласно доказанному свойству, $\deg(g_1) = \deg(h_0) = \deg(h_1) = 1$ (последнее равенство следует из определения индекса). Поэтому $\deg(g_1) \neq \deg(g_0)$, и это противоречие доказывает теорему. $\square$

Будем говорить, что множество X гомеоморфно n-мерному шару, если существует взаимно однозначное непрерывное отображение $F : B_n \to X$ такое, что $F^{-1} : X \to B_n$ также непрерывно. Из теоремы Брауэра следует, что для всякого множества X, гомеоморфного B_n, и всякого непрерывного отображения $f : X \to X$ существует точка $a \in X$ такая, что $f(a) = a$. Действительно, если $f : X \to X$ непрерывно, то $F^{-1} \circ f \circ F$ — непрерывное отображение $B_n \to B_n$. Следовательно, существует точка b такая, что $F^{-1}(f(F(b))) = b$, то есть $f(a) = a$, где $a = F(b)$. Отсюда, в частности, вытекает, что кольцо $K = \{(x,y) \mid 1/2 \le x^2 + y^2 \le 1\}$ не гомеоморфно кругу B_2 (и никакому B_n), потому что существуют непрерывные отображения $f : K \to K$, не имеющие неподвижных точек — например, любой поворот вокруг начала координат. Так же доказывается, что никакой шар не гомеоморфен никакой сфере, ленте Мебиуса и др.