ЛЕКЦИЯ 10

Краткое содержание. Расслоения со структурной группой. Классификация векторных расслоений.

Пусть $p : E \to B$ — расслоение со слоем F, и пусть $U_1, U_2 \subset B$ — тривиализующие окрестности, т.е. существуют тривиализации $\lambda_1 : p^{-1}(U_1) \to F$ и $\lambda_2 : p^{-1}(U_2) \to F$. Ограничение тривиализации на прообраз $p^{-1}(b)$ произвольной точки $b \in B$ — гомеоморфизм; таким образом, для всякого $x \in U_1 \cap U_2$ определен гомеоморфизм $\mu_{12}(b) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_1 \circ \lambda_2^{-1} : F \to F$, называемый отображением перехода. Очевидные свойства отображений перехода: $\mu_{12}(b) \circ \mu_{21}(b) = \mathrm{id}_F$ для всех $b \in U_1 \cap U_2$ и $\mu_{12}(b) \circ \mu_{23}(b) \circ \mu_{31}(b) = \mathrm{id}_F$ для всех $b \in U_1 \cap U_2 \cap U_3$.

Пусть G — подгруппа группы гомеоморфизмов слоя F. Говорят, что $p : E \to B$ является расслоением со структурной группой G, если найдется покрытие $B = \bigcup_\alpha U_\alpha$ базы тривиализующими окрестностями такое, что для любого $b \in U_\alpha \cap U_\beta$ отображение перехода $\mu_{\alpha,\beta}(b) \in G$.

Пример 1. Пусть в F фиксирована точка f_0, и G — группа гомеоморфизмов, переводящих f_0 в себя. Тогда расслоения со структурной группой G это расслоения со слоем F и фиксированным сечением.

Пример 2. Пусть F — многообразие, и группа G состоит из диффеоморфизмов. Тогда расслоения со структурной группой G — расслоения с гладкой структурой на слоях; если база B — многообразие, то это гладкие расслоения. Если G — множество диффеоморфизмов, сохраняющих ориентацию, то получаются расслоения с ориентированными слоями, и т.п.

Пример 3. Если F — векторное пространство и G — группа обратимых линейных преобразований, то соответствующие расслоения называются векторными. В слоях векторного расслоения определена структура векторного пространства; множество глобальных сечений также образует векторное пространство.

Пример 4. Пусть F — векторное пространство, а G — группа обратимых аффинных преобразований. Соответствующие расслоения называются аффинными, их слои имеют каноническую аффинную структуру.

Обратно: пусть G — топологическая группа (т.е. группа, являющаяся одновременно топологическим пространством, причем операции умножения и взятия обратного непрерывны), действующая гомеоморфизмами на множестве F. Пусть на топологическом пространстве B задано покрытие открытыми множествами: $B = \bigcup_\alpha U_\alpha$, и для каждой пары индексов α, β определено непрерывное отображение $\mu_\alpha : U_\alpha \cap U_\beta \to G$, причем эти отображения удовлетворяют условиям $\mu_{\alpha\beta} \circ \mu_{\beta\alpha} = \mathrm{id}$ и $\mu_{\alpha\beta} \circ \mu_{\beta\gamma}\mu_{\gamma\alpha} = \mathrm{id}$ (там, где соответствующие композиции определены). Тогда определим топологическое пространство E как фактор объединения $\bigsqcup_\alpha U_\alpha \times F$ по склейкам $(x, e) \sim (x, \mu_{\alpha\beta}(x)(e))$ для всех $e \in F$, всех α, β и $x \in U_\alpha \cap U_\beta$. Определим также отображение $p : E \to B$ равенством $p(x, e) = x$. Как нетрудно видеть, p будет расслоением со слоем F и структурной группой G.

Расслоения с данной базой B слоем F и структурной группой G образуют категорию (обозначим ее $\mathrm{Fibre}_{B,F,G}$): морфизмом между расслоениями $p_1 : E_1 \to B$ и $p_2 : E_2 \to B$ называется непрерывное отображение $f : E_1 \to E_2$ такое, что $p_2 \circ f = p_1$ и для каждого $b \in B$ отображение $\lambda_2|_{p_2^{-1}(b)} \circ f \circ \lambda_1^{-1}|_{p_1^{-1}(b)} : F \to F$ — элемент структурной группы G.

Пусть $p : E \to B$ — расслоение со слоем F и структурной группой G, X — топологическое пространство, а $f : X \to B$ — непрерывное отображение. Положим $f^*E \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, e) \in X \times E \mid f(x) = p(e)\}$ и определим отображение $f^*p : f^*E \to X$ равенством $f^*p(x, e) = x$.

Теорема 1. *Отображение $f^*p : f^*E \to X$ является расслоением с базой X, слоем F и структурной группой G.*

Доказательство — упражнение (прямая проверка определения).

В дальнейшем мы будем изучать векторные расслоения ранга n, т.е. расслоения со слоем $\mathbb{R}^n$ и структурной группой $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Важная техническая лемма:

Лемма 1. *Пусть $p : E \to B$ — векторное расслоение, база которого B — компактное клеточное пространство. Пусть $X \subset B$ — клеточное подпространство, и над X задано конечное множество сечений $\varphi_1, \dots, \varphi_N : X \to E$ расслоения таких, что для каждого $x \in X$ векторы $\varphi_1(x), \dots, \varphi_N(x)$ порождают векторное пространство $p^{-1}(x) \subset E$. Тогда существует конечное множество сечений $\psi_1, \dots, \psi_M : B \to E$ (определенных на всем B) таких, что для каждого $b \in B$ векторы $\psi_1(b), \dots, \psi_N(b)$ порождают $p^{-1}(b)$, и при $x \in X$ каждый вектор $\psi_i(x)$ совпадает с каким-либо $\psi_j(x)$ или равен нулю.*

Доказательство. Поскольку компактное клеточное пространство состоит из конечного числа клеток, достаточно разобрать случай, когда B — замыкание клетки e, а X — ее граница. Пусть $\chi : B_n \to B$ — характеристическое отображение (B_n — n-мерный шар). Очевидно, утверждение леммы для расслоений p и $\chi^* p$ эквивалентно; таким образом, достаточно рассмотреть случай $B = B_n$, $X = \partial B_n$.

Расслоение с базой B_n тривиально по лемме Фельдбау. Отсюда следует, что можно выбрать сечения $\psi_1, \dots, \psi_k$ так, чтобы их значения в произвольной точке $b \in B_n$ были базисом в пространстве $p^{-1}(b)$. Сечения $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ можно продолжить на B_n, полагая $\varphi_i(b) = \varphi_i(b/\,|b|)\,|b|$. Добавим к $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ еще сечения $\psi_i(b)(1-|b|)$, и лемма доказана. $\square$

Процедура построения расслоений по отображениям перехода позволяет для любых двух векторных расслоений V_1 и V_2 с одной базой B (возможно, разного ранга n_1 и n_2) определить их тензорное произведение $V_1 \otimes V_2$: слой этого расслоения равен $\mathbb{R}^{n_1} \otimes \mathbb{R}^{n_2} (= \mathbb{R}^{n_1 n_2})$, а отображение перехода на $U_\alpha \cap U_\beta$ есть $\mu^{(1)}_{\alpha\beta} \otimes \mu^{(2)}_{\alpha\beta}$. Аналогично для произвольного векторного расслоения V можно определить двойственное к нему расслоение V^* с той же базой: его слой $(\mathbb{R}^n)^* (= \mathbb{R}^n)$, а отображение перехода на $U_\alpha \cap U_\beta$ равно $(\mu^{-1}_{\alpha\beta})^* = \mu^*_{\beta\alpha}$.

Теорема 2. *Пусть $p : E \to B$ — векторное расслоение, X — компактное клеточное пространство, а $f : X \times [0,1] \to B$ — гомотопия, соединяющая отображения $f_0 = f(\cdot, 0)$ и $f_1 = f(\cdot, 1)$. Тогда расслоения $f_0^* p$ и $f_1^* p$ эквивалентны.*

Доказательство. Для любых двух векторных расслоений V_1 и V_2 слой расслоения $V_1^* \otimes V_2$ — множество линейных отображений из слоя V_1 в слой V_2. Рассмотрим подрасслоение $\mathrm{Iso}(V_1, V_2) \subset V_1^* \otimes V_2$, слой которого состоит из обратимых операторов. Эквивалентность расслоений V_1 и V_2 означает, что расслоение $\mathrm{Iso}(V_1, V_2)$ имеет сечение.

Рассмотрим на $X \times [0,1]$ расслоения $V_1 = f^* p$ и $V_2 = (f_0 \circ u)^* p$, где $u : X \times [0,1] \to X$ — проекция на первый сомножитель. Эти расслоения совпадают на $X \times \{0\}$, откуда вытекает, что $\mathrm{Iso}(V_1, V_2)$ имеет сечение над $X \times \{0\}$. Будем считать его сечением векторного расслоения $V_1^* \otimes V_2$; тогда, согласно лемме 1, это сечение можно продолжить на все $X \times [0,1]$. В силу непрерывности при достаточно малых t значения сечения будут обратимыми операторами, то есть оно будет сечением $\mathrm{Iso}(V_1, V_2)$. Тем самым при достаточно малых t все расслоения $f_t^* p$ эквивалентны. В силу компактности отрезка $[0,1]$ отсюда вытекает утверждение теоремы. $\square$

Пусть $G(N, k)$ — грассманиан k-мерных подпространств в $\mathbb{R}^N$. Обозначим H множество пар (V, x), $V \in G(N, k)$, $x \in V \subset \mathbb{R}^N$, и определим отображение $p : H \to G(N, k)$ формулой $p(V, x) = V$. Тогда p является k-мерным векторным расслоением с базой $G(N, k)$; оно называется тавтологическим и обозначается η. Произвольному непрерывному отображению $f : B \to G(N, k)$ соответствует ориентированное векторное расслоение $f^* \eta$ с базой B.

Теорема 3. *Пусть B — компактное клеточное пространство, содержащее r клеток, и $k \in \mathbb{Z}_{>0}$. Тогда соответствие $f \mapsto f^* \eta$ является взаимно однозначным соответствием между классами гомотопии отображений $B \to G(rk, k)$ и классами изоморфизма векторных расслоений ранга k с базой B.*

Доказательство. Пусть $p : E \to B$ — векторное расслоение ранга k. Согласно лемме 1, это расслоение имеет сечения $\psi_1 \dots, \psi_{rk}$, значения которых в каждой точке $b \in B$ порождают слой $p^{-1}(b)$. Рассмотрим пространство $V = \mathbb{R}^{rk}$, в котором $\psi_1, \dots, \psi_{rk}$ — базис. Тогда естественное линейное отображение $\xi_b : V \to p^{-1}(b)$, переводящее ψ_i в $\psi_i(b)$, является сюръекцией. Следовательно, $\dim \mathrm{Ker}\, \xi_b = rk - k$. Возьмем в качестве $f(b)$ ортогональное дополнение к $\mathrm{Ker}\, \xi_b$; нетрудно проверить, что $p = f^* \eta$. Тем самым отображение $f \mapsto f^* \eta$ — сюръекция (каждое векторное расслоение является $f^* \eta$ для подходящего f).

Гомотопическая инвариантность отображения $f \mapsto f^* \mu$ вытекает из теоремы 2 Пусть теперь расслоения $f_0^* p$ и $f_1^* p$ эквивалентны. Слой расслоения $f^* p$, где $f : B \to G(N, k)$ порождается набором сечений φ_i, $i = 1, \dots, N$; эквивалентность означает, что наборы сечений, соответствующие расслоениям $f_0^* p$ и $f_1^* p$, переводятся друг в друга линейным отображением $A \in \mathrm{GL}(N, \mathbb{R})$. Но тогда $f_1 = A \circ f_0$. Оператор A можно непрерывно продеформировать (в группе $\mathrm{GL}(N, \mathbb{R})$) либо в единичный, либо в оператор с диагональной матрицей, один элемент которой равен -1, а остальные 1. В первом случае отображения f_0 и f_1 гомотопны; во втором случае можно заранее заменить $\psi_1 \mapsto -\psi_1$ и свести его к первому. $\square$