ЛЕКЦИЯ 2

Краткое содержание. Топологическая категория, методы построения топологических пространств, связность, линейная связность, компактность.

Топологическим пространством называется множество X, в котором выделена система подмножеств, называемых *открытыми*, обладающая следующими свойствами:

1) Подмножества $\varnothing \subset X$ и $X \subset X$ открыты.
2) Если $\{U_\alpha\}$ — семейство открытых множеств (любой мощности), то их объединение $\bigcup_\alpha U_\alpha$ открыто.
3) Если U_1 и U_2 — открытые множества, то их пересечение $U_1 \cap U_2$ открыто.

Из свойства 3 вытекает по индукции, что пересечение любого конечного семейства открытых множеств открыто; для бесконечных семейств это может быть неверно. Множество открытых подмножеств топологического пространства иногда называют его *топологией*. Множество $Y \subset X$ называется замкнутым, если его дополнение $X \setminus Y$ открыто.

Пример 1. Дискретная топология: множество X произвольно, все подмножества $U \subset X$ считаются открытыми. Противоположная ей "топология комка теста": открытыми считаются только $\varnothing$ и все X.

Пример 2. $X = \mathbb{R}$; подмножество $U \subset \mathbb{R}$ называется открытым, если для всякого $u \in U$ найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $(u-\varepsilon, u+\varepsilon) \subset U$; очевидно, свойства 1–3 выполнены.

Пример 3. Обобщение примера 2: $X = \mathbb{R}^n$; подмножество $U \subset \mathbb{R}$ называется открытым, если для всякого $u \in U$ найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $\{x \in \mathbb{R} \mid |x-u| < \varepsilon\} \subset U$, где для $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}$ по определению $|a| = \|a\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$. Свойства 1–3, очевидно, выполнены. Также можно в определении открытого множества положить, например, $|a| = \|a\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n |a_i|$, или $|a| = \|a\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i=1}^n |a_i|$. Поскольку для всех $a \in \mathbb{R}^n$ выполнены неравенства $\|a\|_\infty \le \|a\|_1 \le n\|a\|_\infty$ и $\|a\|_\infty \le \|a\|_2 \le \sqrt{n}\|a\|_\infty$, эти определения дают одну и ту же структуру топологического пространства.

Структура топологического пространства может возникать различными способами; вот наиболее частые случаи.

1. Метрические пространства Это обобщение примера 3: пусть X — метрическое пространство, т.е. множество, для которого определена функция (называемая метрикой или расстоянием) $\varrho : X \times X \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ такая, что $\varrho(x,y) = \varrho(y,x)$ (симметрия), $\varrho(x,y) = 0 \iff x = y$ (невырожденность) и $\varrho(x,z) \le \varrho(x,y) + \varrho(y,z)$ (неравенство треугольника) для всех $x, y, z \in X$. Тогда в X можно ввести структуру топологического пространства: множество U называется открытым, если для всякого $x \in U$ найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $B_\varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X \mid \varrho(y,x) < \varepsilon\} \subset U$. Свойства 1 и 2 топологии очевидны, а свойство 3 следует из того, что если $B_{\varepsilon_1}(x) \subset U_1$ и $B_{\varepsilon_2}(x) \subset U_2$, то $B_\varepsilon(x) \subset U_1 \cap U_2$, где $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

В примере 3 в пространстве $\mathbb{R}^n$ определены три различные метрики, дающие одну и ту же структуру топологического пространства, а именно, $\varrho(a,b) = |b-a|$, где $|\cdot| = \|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ или $\|\cdot\|_\infty$. Симметрия и невырожденность этих метрик очевидны; неравенство треугольника также очевидно для $\|\cdot\|_1$ или $\|\cdot\|_\infty$; для $\|\cdot\|_2$ оно доказывалось в курсе анализа.

2. Декартовы произведения Декартово произведение $X \times Y$ двух топологических пространств можно наделить топологией: множество $A \subset X \times Y$ считается открытым, если для каждого его элемента $(x,y) \in A$ существуют открытые множества $U \subset X$, $V \subset Y$ такие, что $x \in U$, $y \in V$ и $U \times V \subset A$. По индукции можно определить топологию на декартовом произведении любого конечного числа топологических пространств. Например, полученная таким образом топология на $\mathbb{R}^n$ совпадает с топологией, определенной в $\mathbb{R}^n$ с помощью метрики (докажите!).

3. Подмножества Пусть X — топологическое пространство, $Y \subset X$. Тогда на Y можно ввести структуру топологического пространства: множество $V \subset Y$ считается открытым, если $V = Y \cap U$ для некоторого открытого подмножества $U \subset X$. Свойства 1–3 очевидны. Например, таким образом можно ввести топологию на окружности: $S^1 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$, или на произвольной сфере в $\mathbb{R}^n$, поскольку в $\mathbb{R}^n$ топология уже определена.

4. Факторизации Пусть топологическое пространство X представлено как объединение непересекающихся подмножеств: $X = \bigsqcup_\alpha X_\alpha$. Тогда на множестве всех X_α можно ввести структуру топологического пространства. А именно, множество $\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$, где A — произвольное множество индексов, считается открытым, если *объединение* этих множеств $\bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha \subset X$ открыто (как подмножество X). Нетрудно проверить, что это действительно топология.

В описанном случае канонически определено отображение $p : X \to \{X_\alpha\}$ (факторизация), сопоставляющее каждой точке $x \in X$ множество $X_\alpha \ni x$ — по условию, X_α существует и единственно.

Теорема 1. *Отображение p непрерывно. Отображение $f : \{X_\alpha\} \to Y$ в произвольное топологическое пространство непрерывно тогда и только тогда, когда $f \circ p : X \to Y$ непрерывно.*

Доказательство очевидно.

Пример 4. Пусть $X = [0, 1]$, $X_0 = \{0, 1\}$, а остальные X_α состоят из одной точки. Факторпространство $\{X_\alpha\}$ в данном случае называется "отрезок со склеенными концами" и обозначается $[0, 1]/(0 \sim 1)$. Оно гомеоморфно окружности $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$: отображение $f : X \to S^1$ задано формулой $f(t) = e^{2\pi it}$, $0 < t < 1$, и $f(\{0, 1\}) = 1$. Оно непрерывно, поскольку $g = f \circ p : [0, 1] \to S^1$ действует по формуле $g(t) = e^{2\pi it}$ и, очевидно, непрерывно. Обратное отображение f^{-1} также непрерывно. Для этого достаточно показать (почему?), что открыт в S^1 образ $f(p((a, b) \cap [0, 1]))$ при произвольных a и b. Но этот образ, если непуст, является дугой (без концов) в окружности, а это открытое множество, потому что является пересечением окружности $S^1 \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ и открытого круга в $\mathbb{R}^2$.

Пример 5. Разобьем окружность S^1 на подмножества из n точек вида $\{x, x\zeta, \dots, x\zeta^{n-1}\}$, где $x \in S^1$, $\zeta = e^{2\pi i/n}$. Тогда факторпространство $\{X_\alpha\}$ гомеоморфно отрезку со склеенными концами, то есть окружности. Гомеоморфизм $f : [0, 1]/(0 \sim 1) \to \{X_\alpha\}$ таков, что отображение $g = f \circ p : [0, 1] \to \{X_\alpha\}$ задается формулой $g(t) = \{e^{2\pi it/n}, e^{2\pi i(t+1)/n}, \dots, e^{2\pi i(t+n-1)/n}\}$. Проверка того, что f существует и является гомеоморфизмом — упражнение.

Пример 6. Рассмотрим действие группы $\mathbb{R}$ действительных чисел по сложению на торе $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$: числу t соответствует отображение A_t, действующее по формуле $A_t(u, v) = (ue^{it}, ve^{\mu it})$; здесь $u, v \in S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ и $\mu \in \mathbb{R}$. Здесь возможны два различных случая:

1. μ рационально, т.е. $\mu = k/l$, где $k, l \in \mathbb{Z}$ В этом случае $\mathbb{R}$ содержит подгруппу $G = \{ln \mid n \in \mathbb{Z}\}$, каждый элемент которой действует тривиально. Таким образом, на $\mathbb{T}^2$ определено действие фактора $\mathbb{R}/G$. Как легко проверить, это действие точное (предполагается, что дробь k/l несократима), т.е. $A_{t_1} = A_{t_2}$ тогда и только тогда, когда $t_1 - t_2 \in G$. Рассмотрим орбиту точки x, т.е. множество $O_x = \{A_t(x) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Формула $t \mapsto A_t(x)$ определяет взаимно однозначное соответствие между точками отрезка $[0, l]$ со склеенными концами и точками O_x. Это соответствие непрерывно и имеет непрерывное обратное — следовательно, произвольная орбита O_x гомеоморфна отрезку со склеенными концами, то есть окружности.

Множество орбит в данном случае также гомеоморфно окружности. Действительно, в каждой орбите имеется ровно l точек (u, v) таких, что $u = 1$, причем если одна из этих точек $(1, v_0)$, то в остальных значения v равны $v_0e^{2\pi ik/l}, v_0e^{4\pi ik/l}, \dots$. Поскольку k и l взаимно просты, эти точки совпадают (в переставленном порядке) с точками $(1, v_0), (1, v_0e^{2\pi i/l}), \dots, (1, v_0e^{2\pi i(l-1)/l})$. Отображая орбиту в множество таких точек, получим гомеоморфизм с пространством примера 5, то есть с окружностью.

2. μ иррационально В этом случае каждая орбита гомеоморфна $\mathbb{R}$ и плотна в $\mathbb{T}^2$, т.е. пересекает любое непустое открытое множество $U \subset \mathbb{T}^2$ (доказательство — упражнение). Пусть $V = \{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ — непустое открытое подмножество пространства орбит. Пусть $X_\beta \notin V$; поскольку X_β плотна в $\mathbb{T}^2$, она пересекает открытое множество $U = \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$. Но это невозможно, поскольку $X_\beta \cap X_\alpha = \varnothing$ для всякого $\alpha \neq \beta$. Поэтому в пространстве орбит в данном случае есть только два открытых множества — пустое множество и все пространство (топология "комка теста" из примера 1).

Пример 7. Пусть имеется произвольный набор топологических пространств X_α, в каждом из которых отмечена точка x_α. Букетом $\bigvee_\alpha X_\alpha$ называется несвязное объединение $\bigsqcup_\alpha X_\alpha$ (с очевидной топологией), в котором все точки x_α склеены в одну (называемую вершиной букета). Например, букет конечного числа k окружностей представляет собой граф с единственной вершиной и k ребрами-петлями.

Отображение $f : X \to Y$ одного топологического пространства в другое называется непрерывным, если для любого открытого подмножества $U \subset Y$ множество $f^{-1}(U) = \{x \in X \mid f(x) \in U\} \subset X$ открыто.

Категорией называется пара, состоящая из набора объектов и набора морфизмов. Каждый морфизм действует из одного объекта A в другой объект B (возможно $B = A$). Для любых двух морфизмов $f : A \to B$ и $g : B \to C$ определена их композиция $g \circ f : A \to C$, причем операция композиции ассоциативна: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Предполагается также, что для любого объекта A существует единичный морфизм $1_A : A \to A$ такой, что $f \circ 1_A = f$ и $1_A \circ g = g$ для любых морфизмов f и g.

Функтором из категории U в категорию V называется соответствие F между объектами и морфизмами категории U и категории V такое, что если $f : A \to B$, то $F(f) : F(A) \to F(B)$, единичный морфизм переходит в единичный: $F(1_A) = 1_{F(A)}$, а композиция переходит в композицию: $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.

Пример 8. Категория **Set** множеств: объекты — множества, морфизмы — любые отображения множеств, композиция — композиция отображений. Категория групп: объекты — группы, морфизмы — гомоморфизмы групп. И т.п.

Категория **Top**: объекты — топологические пространства, морфизмы — непрерывные отображения. Это действительно категория, поскольку композиция непрерывных отображений, очевидно, непрерывна.

"Забывающий" функтор **Top** $\to$ **Set**: каждому топологическому пространству сопоставляется оно же просто как множество, а каждому непрерывному отображению — оно же просто как отображение.

Морфизм $f : A \to B$ между объектами категории U называется изоморфмзмом, если для него существует обратный, т.е. морфизм $g : B \to A$ такой, что $g \circ f = 1_A$ и $f \circ g = 1_B$. Каждому изоморфизму $f : A \to B$ можно сопоставить функтор $\mathrm{Exch}_f : U \to U$, который переводит A в B, B в A, а остальные объекты оставляет на месте. Морфизмы $h : A \to C$, где $C \neq A, B$, переходят в $\mathrm{Exch}_f(h) = h \circ g : B \to C$, морфмзмы $h : C \to A$, где $C \neq A, B$, — в $\mathrm{Exch}_f(h) = f \circ h : C \to B$; аналогично с морфизмами $B \to C$ и $C \to B$. Морфизмы $h : A \to A$ переходят в $\mathrm{Exch}_f(h) = f \circ h \circ g : B \to B$, аналогично $h : B \to B$. Морфизмы $h : A \to B$ переходят в $\mathrm{Exch}_f(h) = g \circ h \circ g : B \to A$; аналогично для $h : B \to A$. Все остальные морфизмы остаются на месте. Нетрудно проверить, что это действительно функтор. Наличие такого функтора означает, что "с точки зрения категории U" объекты A и B неотличимы: всякое утверждение, верное для A, которое можно сформулировать в терминах объектов и морфизмов U, верно также и для B, и наоборот.

Топологические пространства X и Y, эквивалентные в категории **Top**, называются гомеоморфными.

Топологическое пространство X называется связным, если его нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся непустых открытых подмножеств. В лекции 1 было доказано, что отрезок $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ связен.

Теорема 2. *Образ связного пространства при непрерывном отображении связен.*

Доказательство. Пусть X связно и $f : X \to Y$ непрерывно. Пусть $f(X) = A \cup B$, где $A, B \subset f(X)$ открыты, непусты и $A \cap B = \varnothing$. По определению топологии в подмножестве $f(X) \subset Y$ это означает, что $A = U \cap f(X)$ и $B = V \cap f(X)$, где $U, V \subset Y$ открыты и $U \cap V \cap f(X) = \varnothing$. Но тогда $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$, где $f^{-1}(U) = f^{-1}(A)$ и $f^{-1}(V) = f^{-1}(B)$ открыты и непусты, и $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \varnothing$. Это противоречит связности X. $\square$

Назовем точки a и b топологического пространства X эквивалентными, если существует соединяющая их кривая, т.е. такое непрерывное отображение $f : [0, 1] \to X$, что $f(0) = a$, $f(1) = b$.

Теорема 3. *Введенное отношение — на самом деле отношение эквивалентности.*

Доказательство. Любую точку a можно соединить с собой кривой $\gamma(t) \equiv a$. Если кривая γ соединяет a и b, то кривая $\gamma^{-1}(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \gamma(1 - t)$ соединяет b и a. Если кривая γ_1 соединяет a и b, а кривая γ_2соединяет b и c, то кривая $\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \le t \le 1/2, \\ \gamma_2(2t - 1), & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$ непрерывна (почему?) и соединяет b и c. $\square$

Классы эквивалентности по введенному отношению называются компонентами линейной связности пространства X. Если такая компонента одна, пространство называется линейно связным.

Теорема 4. *Линейно связное пространство является связным.*

Доказательство. Пусть это не так, X линейно связно, но $X = U_1 \cup U_2$ — объединение двух непересекающихся непустых открытых множеств. Возьмем $a \in U_1$, $b \in U_2$ и рассмотрим кривую f, соединяющую a и b. Тогда если $V_1 = f^{-1}(U_1)$, $V_2 = f^{-1}(U_2)$, то $V_1, V_2 \subset [0, 1]$ открыты (поскольку f непрерывно), не пересекаются (поскольку U_1 и U_2 не пересекаются) и $V_1 \cup V_2 = [0, 1]$. Это противоречит связности отрезка $[0, 1]$ $\square$

Из теоремы вытекает, в частности, связность $\mathbb{R}^n$ при любом n, а также связность произвольного выпуклого подмножества $X \subset \mathbb{R}^n$ (в качестве кривой, соединяющей точки a и b, можно взять произвольную параметризацию отрезка $[a, b] \subset X$, например, $f(t) = (1 - t)a + tb$).

Пример 9. Не любое топологическое пространство можно разбить на непересекающиеся открытые связные подмножества. Действительно, пусть $X = \mathbb{Q}$ (с топологией, унаследованной из $\mathbb{R}$), и пусть $A \subset X$ — подмножество, содержащее как минимум две точки, a и b. Пусть $a < b$; тогда существует число $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ такое, что $a < \alpha < b$. Множества $U_1 = A \cap (-\infty, \alpha)$ и $U_2 = A \cap (\alpha, +\infty)$ открыты (как пересечения A с открытыми), непусты ($a \in U_1$, $b \in U_2$), не пересекаются, и $A = U_1 \cup U_2$ — следовательно, A не связно. Таким образом, связные подмножества $\mathbb{Q}$ — только одноточечные (они являются компонентами линейной связности), но они не открыты.

Топологическое пространство X называется компактным (или компактом), если для любого набора открытых подмножеств $U_\alpha \subset X$ такого, что $\bigcup_\alpha U_\alpha = X$, найдется конечный набор индексов $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ такой, что $U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_N} = X$.

Пример 10. Параллелепипед $\Pi = \{(x_1, \dots, x_n) \mid a_i \le x_i \le b_i \, \forall i = 1, \dots, n\} \subset \mathbb{R}^n$ — компакт. Действительно, пусть $\bigcup_\alpha U_\alpha = \Pi$. Разделим параллелепипед Π на 2^n частей, разрезав каждое из его ребер пополам — получатся параллелепипеды, заданные неравенствами вида $a_i^{(1)} \le x_i \le b_i^{(1)}/2$ (где либо $a_i^{(1)} = a_i$, $b_i^{(1)} = (a_i + b_i)/2$, либо $a_i^{(1)} = (a_i + b_i)/2$, $b_i^{(1)} = b_i$ для каждого i). Если каждый из полученных параллелепипедов можно покрыть конечным числом множеств U_α, то это верно и для исходного параллелепипеда Π и теорема доказана. В противном случае выберем параллелепипед $\Pi_1 \subset \Pi$, который конечным числом U_α не покрывается; проделаем с ним ту же процедуру, получим $\Pi_2 \subset \Pi_1$, и т.д.

Таким образом получится для каждого i последовательность вложенных отрезков $[a_i, b_i] \supset [a_i^{(1)}, b_i^{(1)}] \supset [a_i^{(2)}, b_i^{(2)}] \supset \dots$ с длинами, стремящимися к нулю. Для каждого i эти отрезки имеют общую точку y_i; пусть $y = (y_1, \dots, y_n) \in \Pi$. Пусть α_0 — индекс, для которого $y \in U_{\alpha_0}$. Множество U_{α_0} открыто, так что найдется $\varepsilon > 0$ такое, что шар $B_\varepsilon(y)$ радиуса ε с центром y лежит в U_{α_0}. Поскольку $y \in \Pi_n$ при всех n и диаметр параллелепипеда Π_n стремится к нулю при $n \to \infty$, для достаточно большого n имеет место включение $\Pi_n \subset B_\varepsilon(y) \subset U_{\alpha_0}$, что противоречит тому, что Π_n не покрывается конечным набором множеств U_α.

Теорема 5. *Образ компактного пространства при непрерывном отображении — компакт.*

Доказательство. Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение, X — компакт, и $f(X) \subset Y$ наделено топологией подмножества. Пусть $f(X) = \bigcup_\alpha U_\alpha$, где $U_\alpha \subset f(X)$ открыто, то есть $U_\alpha = f(X) \cap W_\alpha$, где $W_\alpha \subset Y$ открыто. Тогда $V_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}(U_\alpha) = f^{-1}(W_\alpha) \subset X$ — открытые множества, и $\bigcup_\alpha V_\alpha = X$. В силу компактности X найдутся индексы $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ такие, что $X = V_{\alpha_1} \cup \dots \cup V_{\alpha_N}$, откуда $f(X) = U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_N}$, и компактность доказана. $\square$

Теорема 6. *Если X компактно, а $Y \subset X$ замкнуто, то Y компактно.*

Доказательство. Пусть $Y = \bigcup_\alpha U_\alpha$, где $U_\alpha \subset Y$ открыты. По определению топологии в подмножестве $U_\alpha = Y \cap V_\alpha$, где $V_\alpha \subset X$ открыто. Тогда $X = \bigcup_\alpha V_\alpha \cup (X \setminus Y)$; последнее множество также открыто по условию теоремы. Поскольку X компактно, то найдется набор индексов $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ такой, что $X = V_{\alpha_1} \cup \dots \cup V_{\alpha_N} \cup (X \setminus Y)$. Отсюда вытекает, что $Y = U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_N}$, и компактность доказана. $\square$

Теорема 7. *Пусть X — топологическое пространство, обладающее свойством Хаусдорфа: для любых двух точек $a, b \in X$, $a \ne b$, найдутся открытые множества $A \ni a$, $B \ni b$ такие, что $A \cap B = \varnothing$. Пусть $Y \subset X$ компактно. Тогда Y замкнуто.*

Доказательство. В силу свойства Хаусдорфа для любых двух точек $a \in Y$ и $b \notin Y$ найдутся непересекающиеся открытые множества $U_{a,b} \ni a$ и $V_{a,b} \ni b$. Тогда для всякого $b \notin Y$ имеем $Y \subset \bigcup_{a,b} U_{a,b}$, откуда в силу компактности Y найдутся точки $a_1, \dots, a_N$ такие, что $Y \subset U_{a_1,b} \cup \dots \cup U_{a_N,b}$. Множество $V_b = V_{a_1,b} \cap \dots \cap V_{a_N,b}$ открыто, $b \in V_b$ и $V_b \cap Y = \varnothing$. Следовательно, $X \setminus Y = \bigcup_{b \in X \setminus Y} V_b$ — открытое множество. $\square$

Замечание. Теорема 7 означает, что в “хороших” пространствах компактные подмножества — частный случай замкнутых. В то же время теорема 5 показывает, что по отношению к отображениям замкнутые и компактные множества ведут себя противоположным (или, скорее, взаимно двойственным) образом: образ компакта при непрерывном отображении — компакт, а прообраз — не обязательно (рассмотрите отображение из любого некомпактного пространства в точку). В то же время прообраз замкнутого подмножества при непрерывном отображении замкнут (это эквивалентно определению), а образ — не обязательно (рассмотрите произвольное пространство X, его незамкнутое подмножество Y и отображение вложения $\iota : Y \to X$, которое каждой точке сопоставляет ее же).

Теорема 8. *Подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто.*

Доказательство. Поскольку $\mathbb{R}^n$ обладает свойством Хаусдорфа, компактное подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$ замкнуто. Рассмотрим открытые множества $U_i = B_i(0)$ (открытые шары радиуса i с центром в начале координат). Очевидно, $X \subset \bigcup_i U_i = \mathbb{R}^n$; если X компактно, то найдется $X \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_N} = U_{\max(i_1, \dots, i_N)}$ — следовательно, X ограничено.

Пусть теперь X ограничено и замкнуто. Тогда оно является замкнутым подмнождеством некоторого параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^n$; из теоремы 6 и примера 10 следует, что X компактно. $\square$