ЛЕКЦИЯ 3

Краткое содержание. Гомотопическая категория. Фундаментальный группоид и фундаментальная группа.

Гомотопией непрерывных отображений $f_0 : X \to Y$ и $f_1 : X \to Y$ называется непрерывное отображение $f : X \times [0,1] \to Y$ такое, что $f(x,0) = f_0(x)$ и $f(x,1) = f_1(x)$. Отображения, между которыми существует гомотопия, называются гомотопными (запись $f_0 \sim f_1$; часто вместо $f(x,t)$ пишут $f_t(x)$). Как нетрудно видеть, гомотопность обладает следующими свойствами:

Лемма 1. *Гомотопность — отношение эквивалентности на множестве отображений $X \to Y$. Иными словами, любое отображение $f : X \to Y$ гомотопно само себе; если $f \sim g$, то $g \sim f$, и если $f \sim g \sim h$, то $f \sim h$.*

Доказательство. Гомотопия, соединяющая f с собой: $F(x,t) = f(x)$. Если F — гомотопия, соединяющая f с g, то гомотопия $\tilde{F}(x,t) = F(x,1-t)$ соединяет g с f. Если гомотопия F_1 соединяет f с g, а гомотопия F_2 — g с h, то f соединяется с h гомотопией $F(x,t) = (F_1 \cdot F_2)(x,t) = \begin{cases} F_1(x,2t), & 0 \le t \le 1/2, \\ F_2(x,2t-1), & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$. □

Лемма 2. *Гомотопность совместима с композицией отображений: если $f_0 \sim f_1$ и $g_0 \sim g_1$, где $f_0, f_1 : X \to Y$, а $g_0, g_1 : Y \to Z$, то $g_0 \circ f_0 \sim g_1 \circ f_1$.*

Доказательство. Гомотопия, соедияющая $g_0 \circ f_0$ с $g_1 \circ f_1$, это $g_t \circ f_t$. □

Объектами гомотопической категории **Hom** являются топологические пространства, а морфизмами $X \to Y$ — классы гомотопии отображений (существующие согласно лемме 1). Композиция классов гомотопии определяется так: если $F : X \to Y$ и $G : Y \to Z$ — классы гомотопии, и $f \in F$, $g \in G$ — представители этих классов, то $G \circ F$ — класс гомотопии отображения $g \circ f$; согласно лемме 2, это определение корректно, т.е. не зависит от выбора представителей f, g классов F, G. Единичным морфизмом 1_X в гомотопической категории является класс гомотопии тождественного отображения $\mathrm{id} : X \to X$.

Эквивалентность в гомотопической категории называется гомотопической эквивалентностью. Согласно общему определению, пространства X и Y гомотопически эквивалентны, если существуют непрерывные отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ такие, что $g \circ f \sim \mathrm{id}_X$ и $f \circ g \sim \mathrm{id}_Y$.

Пример 1. $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ гомотопически эквивалентно окружности $Y = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Здесь $f(x,y) = (x/\sqrt{x^2+y^2}, y/\sqrt{x^2+y^2})$, а $g(x,y) = (x,y)$. Композиция $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, а $g \circ f = F_0 : X \to X$ — проекция $F_0(x,y) = (x/\sqrt{x^2+y^2}, y/\sqrt{x^2+y^2})$. Гомотопия, соединяющая F_0 с тождественным отображением, есть $F_t(x,y) = (x/(t + (1-t)\sqrt{x^2+y^2}), y/(t+(1-t)\sqrt{x^2+y^2}))$.

Для произвольного топологического пространства X фундаментальный группоид в X — категория $\Pi(X)$, объектами которой являются точки $a \in X$, а морфизмы $a \to b$ — классы гомотопии путей, соединяющих a и b. Путь это непрерывное отображение $\gamma : [0,1] \to X$ такое, что $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$, а гомотопией путей называется непрерывное отображение $F : [0,1]^2 \to X$ такое, что $F(0,s) = a$ и $F(1,s) = b$ для всех $s \in [0,1]$ (иными словами, $t \mapsto F(t,s)$ для любого s должно быть путем, соединяющим a и b). Композиция определяется так: пусть G_1 — класс гомотопии путей из a в b, а G_2 — путей из b в c. Выберем представителей $\gamma_1 \in G_1$ и $\gamma_2 \in G_2$ и возьмем в качестве $G_1 \cdot G_2$ класс гомотопии пути $\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \le t \le 1/2 \\ \gamma_2(2t-1), & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$.

Замечание. Формула умножения путей совпадает с формулой, использованной при доказательстве транзитивности в лемме 1. Это связано с тем, что путь является гомотопией — гомотопией между отображениями $u_a : \mathrm{pt} \to X$ и $u_b : \mathrm{pt} \to X$; здесь pt — топологическое пространство, состоящее из одной точки, а u_c — отображение, переводящее эту точку в точку $c \in X$.

Теорема 1. *Фундаментальный группоид является категорией, в которой каждый морфизм обратим (такие категории и называются группоидами).*

Доказательство. Для доказательства теоремы следует показать, что: а) определение композиции морфизмов корректно, т.е. не зависит от выбора представителей классов G_1 и G_2, б) композиция морфизмов ассоциативна, в) для каждой точки существует единичный морфизм, г) для каждого морфизма существует обратный. Доказательства всех этих утверждений однотипны и сводятся к построению соответствующих гомотопий; докажем, например, г).

Утверждение сводится к тому, что для всякого пути γ, соединяющего a и b, можно построить путь δ, соединяющий b и a такой, что путь $\gamma \cdot \delta$ гомотопен тождественному. Возьмем $\delta(t) = \gamma(1-t)$; гомотопия:

$$F(t,s) = \begin{cases} \gamma(t), & 0 \le t \le 1-s, \\ \gamma(1-s), & 1-s \le t \le s,. \\ \gamma(1-t), & s \le t \le 1. \end{cases}$$ □

Для любого группоида X и любого объекта a совокупность морфизмов $a \to a$ образует группу G_a. Любой морфизм $f : a \to b$ является изоморфмзмом; соответствующий функтор Exch_f задает изоморфизм групп G_a и G_b, действующий так: любому элементу $x \in G_b$ соответствует элемент $f^{-1} \circ x \circ f \in G_a$; обратный изоморфмзм строится аналогичным образом по морфизму $f^{-1} : b \to a$. Заметим, что если $b = a$, то построенный изоморфизм $G_a \to G_a$ является сопряжением посредством f (внутренний автоморфизм).

Для фундаментального группоида $\Pi(X)$ группа G_a обозначается $\pi_1(X, a)$ и называется фундаментальной группой пространства X в точке a; если точки a и b можно соединить путем (они лежат в одной компоненте линейной связности пространства X), то группы $\pi_1(X, a)$ и $\pi_1(X, b)$ изоморфны; каждому классу гомотопии путей между a и b соответствует изоморфизм групп.

Пример 2. $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Действительно, элементами $\pi_1(S^1, b)$ являются классы гомотопии непрерывных отображений $\gamma : [0,1] \to S^1$ таких, что $\gamma(0) = \gamma(1) = b$. Поскольку отрезок со склеенными концами гомеоморфен окружности, это то же самое, что классы гомотопии отображений $S^1 \to S^1$, переводящих отмеченную точку b в себя.

Как доказано в лекции 1, каждому непрерывному отображению $f : S^1 \to S^1$ можно сопоставить целое число — степень $\deg f$, причем степени гомотопных отображений одинаковы. Тем самым определено отображение $\deg : \pi_1(S^1) \to \mathbb{Z}$; докажем, что оно является изоморфизмом групп.

1. deg — ***гомоморфизм*** Пусть $\gamma_1, \gamma_2 : S^1 \to S^1$ — непрерывные отображения, причем $\gamma_1(b) = b = \gamma_2(b)$. Пусть $b = a_1, a_2, \dots, a_{N_1}$ — разбиение окружности, использованное в определении степени отображения γ_1, а $b = c_1, \dots, c_{N_2}$ — то же самое для γ_2. Затем рассмотрим разбиение окружности $d_1, \dots, d_{N_1+N_2}$, где полярный угол точки d_i при $1 \le i \le N_1$ равен половине полярного угла точки a_i, а полярный угол точки d_i при $N_1 + 1 \le i \le N_1 + N_2$ — половине полярного угла точки c_{i-N_1} плюс π. Очевидно, d_i это разбиение, подходящее для вычисления степени отображения $\gamma_1 \cdot \gamma_2$, и выражение для степени равно $\deg \gamma_1 + \deg \gamma_2$.

2. deg — ***мономорфизм*** Достаточно доказать, что если $\deg \gamma_0 = 0$, то отображение $\gamma_0 : S^1 \to S^1$ гомотопно отображению γ_1, переводящему всю окружность в отмеченную точку b. Рассмотрим отображение $\Gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$, заданное формулой $\Gamma(t) = \mathrm{ind}_{[0,t]}(\gamma_0)$. Это отображение корректно определено и обладает тем свойством, что величина дуги между точками $b = \gamma_0(0) = \gamma_0(1)$ и $\gamma_0(t)$ равна $2\pi\Gamma(t)$ с точностью до прибавления целого кратного 2π. Пусть теперь $\Gamma_s(t) = (1-s)\Gamma(t)$, $0 \le s \le 1$. Тогда однозначно определено отображение $\gamma_s(t)$ такое, что величина дуги между b и $\gamma_s(t)$ равна $2\pi\Gamma_s(t)$ с точностью до целого кратного 2π — в комплексных обозначениях $\gamma_s(t) = \exp(2\pi i \Gamma_s(t))$. Нетрудно видеть, что γ_s — гомотопия между γ_0 и γ_1.

3. deg — ***эпиморфизм*** Имеем $\deg \mathrm{id}_{S^1} = 1$. Поскольку $\deg : G \to \mathbb{Z}$ — гомоморфизм, его образ совпадает со всем $\mathbb{Z}$.