ЛЕКЦИЯ 4

Краткое содержание. Накрытия: примеры, теорема о накрывающей гомотопии, следствия.

Напомним еще раз доказательство того, что $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Ключевую роль в доказательстве играет построение для каждого непрерывного отображения $\gamma : [0,1] \to S^1$ числа $\operatorname{ind}(\gamma) \in \mathbb{R}$ такого, что длина дуги окружности между точками $\gamma(0) \stackrel{\text{def}}{=} b$ и $\gamma(1)$ равна $2\pi \operatorname{ind}(\gamma)$ с точностью до прибавления целого кратного 2π. Рассматривая величину $\Gamma(t) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{ind}_{[0,t]}(\gamma)$, получаем отображение $\Gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$, обладающее свойством $p \circ \Gamma = \gamma$, где $p : \mathbb{R} \to S^1$ задано равенством $p(t) = e^{2\pi i t}$ (предполагая, что $b = 1$).

Обобщением этой конструкции является следующее определение. Пусть E, B, F — топологические пространства. Непрерывное отображение $p : B \to E$ называется (локально тривиальным) расслоением со слоем F, если для всякой точки $b \in B$ найдется такая окрестность U (т.е. такое открытое подмножество $U \subset B$, что $b \in U$) и такое отображение $\lambda : p^{-1}(U) \to F$, что отображение $\Lambda : p^{-1}(U) \to U \times F$, заданное формулой $\Lambda(x) = (p(x), \lambda(x))$ ("график" λ), является гомеоморфизмом.

B называется базой расслоения, E — тотальным пространством, F — стандартным слоем, p — просто расслоением, а λ — тривиализацией (в окрестности U). Поскольку Λ — гомеоморфизм, его ограничение на $p^{-1}(b)$ — также гомеоморфизм, образом которого является $\{b\} \times F$. Отсюда вытекает, что все прообразы точек при расслоении гомеоморфны стандартному слою. Поэтому при описании расслоения пространство F обычно не указывают явно.

Расслоение, слой которого F — дискретное пространство, называется накрытием.

Пример 1. Тривиальное расслоение (в т.ч. накрытие): $E = B \times F$, $p : E \to B$ — проекция на первый сомножитель. Можно взять $U = B$ и $\lambda : B \times F \to F$ — проекция на второй сомножитель.

Пример 2. Уже упоминавшийся пример накрытия: $E = \mathbb{R}$, $B = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, F — дискретное пространство из счетного множества элементов, $p : \mathbb{R} \to S^1$ задана равенством $p(t) = e^{2\pi i t}$. В качестве $U \ni b$ можно взять любую открытую дугу, содержащую b и 1 и не совпадающую со всей окружностью. Тогда прообраз $p^{-1}(U) \subset \mathbb{R}$ — счетный набор интервалов, получающихся друг из друга сдвигом на целые числа. Каждый интервал содержит ровно одно целое число; можно отождествить $F = \mathbb{Z}$ и взять в качестве $\lambda(x)$ целое число, принадлежащее тому же интервалу в $p^{-1}(U)$, что и x.

Пример 3. Пусть E — топологическое пространство, на котором действует группа G. Действие это гомоморфизм A из группы G в группу гомеоморфизмов $E \to E$ (иными словами, каждому элементу $g \in G$ сопоставляется гомеоморфизм $A_g : E \to E$, причем $A_{g_1 g_2} = A_{g_2} \circ A_{g_1}$). Действие называется точно дискретным, если для каждого $x \in E$ существует окрестность U такая, что если множества U и $A_g(U)$ имеют непустое пересечение для некоторого $g \in G$, то g — единичный элемент группы G (и, следовательно, $A_g = \mathrm{id}_E$ и $A_g(U) = U$). Пусть B — пространство орбит действия (топологическое пространство, полученное из E склеиванием точек x и $A_g(x)$ при всех $g \in G$); $p : E \to B$ — естественная проекция (сопоставляющая каждому элементу его орбиту).

В этом случае p — накрытие, слой которого F — группа G с дискретной топологией. Действительно, пусть $b \in B$ — орбита точки $x \in b \subset E$. Пусть $U \ni x$ — окрестность из определения точно дискретного действия, тогда $b \in V$, где $V \stackrel{\text{def}}{=} p(U) \subset B$ — открытое множество (по определению фактор-топологии). По определению точно дискретного действия $p^{-1}(V) = \bigsqcup_{g \in G} A_g(U)$; тривиализация λ сопоставляет всякому элементу $y \in p^{-1}(V)$ элемент $g \in G$ (единственный!) такой, что $y \in A_g(U)$.

Пример 4. Накрытие примера 2 — частный случай примера 3. Здесь группа $G = \mathbb{Z}$ действует на $E = \mathbb{R}$: $A_n(t) = t + n$ для всякого $n \in \mathbb{Z}$ и $t \in \mathbb{R}$. Пространство орбит гомеоморфно S^1 (докажите!), и отображение p сопоставляет каждому действительному числу его орбиту.

Другой частный случай примера 3: группа $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$ из двух элементов действует точно дискретно на сфере S^n: $A_0 = \mathrm{id}$, а A_1 переводит каждую точку сферы в диаметрально противоположную. Пространство орбит в этом случае называется n-мерным проективным пространством и обозначается $\mathbb{R}P^n$; пример 3 дает накрытие $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$, слой которого состоит из двух точек.

Лемма 1 (о поднятии пути)**.** *Пусть $p : E \to B$ — накрытие, $p(x) = b$, и пусть $\gamma : [0,1] \to B$ — непрерывный путь, для которого $\gamma(0) = b$. Тогда существует и единствен путь $\Gamma : [0,1] \to E$ такой, что $p \circ \Gamma = \gamma$ и $\Gamma(0) = x$.*

В частном случае накрытия $p : \mathbb{R} \to S^1$ лемма уже доказана. Однако мы не можем в общем случае применить тот же метод доказательства, т.к. он основан на понятии равномерной непрерывности и, следовательно, требует, чтобы B было метрическим пространством. Вот другое доказательство, подходящее для произвольного B:

Доказательство. Рассмотрим множество T точек $t \in [0,1]$ таких, что для всякого $s \in [0,t]$ путь Γ существует и единствен на отрезке $[0,s]$. Множество T непусто, поскольку $0 \in T$; докажем, что T открыто и замкнуто.

Открытость: пусть $t \in T$. Рассмотрим окрестность $U \subset B$ точки $\gamma(t)$ такую, что существует тривиализация $\lambda : p^{-1}(U) \to F$, упомянутая в определении накрытия; тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $\gamma(s) \in U$ при $s \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$. В силу непрерывности $\Gamma : [0,t] \to E$ отображение $\lambda \circ \Gamma : (t-\varepsilon, t] \to F$ непрерывно и, следовательно, постоянно (поскольку $(t-\varepsilon,t]$ связно, а F дискретно); обозначим его значение φ. Положим теперь $\Gamma(s) = \Lambda^{-1}(\gamma(s), \varphi)$, где $\Lambda = p \times \lambda$ (как в определении накрытия). Поскольку по определению накрытия $\Lambda : p^{-1}(U) \to U \times F$ — гомеоморфизм, $\Gamma : (t-\varepsilon, t+\varepsilon) \to E$ непрерывно и $p \circ \Gamma = \gamma$. Следовательно, Γ существует и, очевидно, единственно на $[0,s]$ при всяком $s \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$, то есть открытость множества T доказана.

Замкнутость: пусть $t_* \in [0,1]$ такова, что всякий интервал $(t_*-\varepsilon, t_*+\varepsilon)$ пересекается с T. Рассмотрим окрестность $U \subset B$ точки $\gamma(t)$ такую, что существует тривиализация $\lambda : p^{-1}(U) \to F$, упомянутая в определении накрытия; тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $\gamma(s) \in U$ при $s \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$. Очевидно, если $t \in T$ и $0 \le s \le t$, то $s \in T$; отсюда следует, что $[0,t) \subset T$. В силу непрерывности $\Gamma : [0,t] \to E$ отображение $\lambda \circ \Gamma : (t-\varepsilon, t) \to F$ непрерывно и, следовательно, постоянно (поскольку $(t-\varepsilon, t)$ связно, а F дискретно); обозначим его значение φ. Положим теперь $\Gamma(t) = \Lambda^{-1}(\gamma(t), \varphi)$, где $\Lambda = p \times \lambda$ (как в определении накрытия). Поскольку по определению накрытия $\Lambda : p^{-1}(U) \to U \times F$ — гомеоморфизм, $\Gamma : (t-\varepsilon, t] \to E$ непрерывно и $p \circ \Gamma = \gamma$. Следовательно, Γ существует и, очевидно, единственно на $[0,s]$ при всяком $s \in [0,t]$, то есть множество T замкнуто.

Поскольку отрезок $[0,1]$ — связное множество, $T = [0,1]$, что доказывает лемму. □

Лемма 2 (теорема о накрывающей гомотопии)**.** *Пусть $p : E \to B$ — накрытие, X — топологическое пространство, $\gamma : X \times [0,1] \to B$ — гомотопия, а $\Gamma_0 : X \to E$ — непрерывное отображение, для которого $p \circ \Gamma_0 = \gamma|_{X \times \{0\}}$. Тогда существует и единственно отображение $\Gamma : X \times [0,1] \to E$ такое, что $p \circ \Gamma = \gamma$ и $\Gamma|_{X \times \{0\}} = \Gamma_0$*

Доказательство. Для произвольного $x \in X$ пусть $\Gamma(x,t)$ — поднятие пути $t \mapsto \gamma(x,t)$ с начальной точкой $\Gamma(x,0) = \Gamma_0(x)$. Согласно лемме 1, такое поднятие существует и единственно, так что в доказательстве нуждается только непрерывность отображения Γ.

Пусть $x \in X$, $t \in [0,1]$, и $U \subset B$ — окрестность точки $\gamma(x,t)$ такая, что существует тривиализация $\lambda : p^{-1}(U) \to F$. Назовем точку t хорошей для x, если найдется $\varepsilon > 0$ и окрестность $V \subset X$ точки x такие, что $\gamma(V \times (t-\varepsilon, t+\varepsilon)) \subset U$ и существует точка $t' \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$ такая, что $\Gamma|_{V \times \{t'\}}$ непрерывно. Обозначим $T_x \subset [0,1]$ множество всех точек, хороших для x. Очевидно, T_x открыто.

Пусть теперь t_* — предельная точка T_x, т.е. $(t_*-\varepsilon, t_*+\varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$ пересекается с T_x. Пусть $U \subset B$ — окрестность точки $\gamma(x, t_*)$, над которой существует тривиализация $\lambda : p^{-1}(U) \to F$. В силу непрерывности γ найдется окрестность $V \subset X$ точки x и число $\varepsilon > 0$ такое, что $\gamma(V \times (t_*-\varepsilon, t_*+\varepsilon)) \subset U$. По предположению, существует $t \in (t_*-\varepsilon, t_*+\varepsilon)$, принадлежащая T_x; тем самым существует окрестность $V' \ni x$ и число $\delta > 0$ такое, что для некоторого $t' \in (t-\delta, t+\delta)$ отображение $\Gamma|_{V \times \{t'\}}$ непрерывно. Без ограничения общности можно считать, что $V' \subset V$ и $t' \in (t_*-\varepsilon, t_*+\varepsilon)$.

Заметим теперь, что отображение $\lambda \circ \Gamma : V \times (t_*-\varepsilon, t_*+\varepsilon) \to F$ непрерывно по $s \in (t_*-\varepsilon, t_*+\varepsilon)$ при фиксированном x, поскольку путь $s \mapsto \Gamma(x,s)$ непрерывен по s. Следовательно, $\lambda(\Gamma(x,s)) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_x \in F$ не зависит от s. Поскольку $\Lambda = p \times \lambda : p^{-1}(U) \to U \times F$ — гомеоморфизм, из непрерывности $\Gamma|_{V \times \{t'\}}$ вытекает, что отображение $\Gamma|_{V \times (t_*-\varepsilon, t_*+\varepsilon)}$ непрерывно. Из этого вытекает, что $t_* \in T_x$, и $T_x \subset [0,1]$ замкнуто. Поскольку T_x также и открыто и непусто ($0 \in T_x$), имеем $T_x = [0,1]$. Повторяя рассуждения, уже проведенное для точки t_*, получим, что если $t \in T_x$, то для некоторого открытого $V \subset X$, $x \in V$, и некоторого $\varepsilon > 0$ отображение $\Gamma|_{V \times (t_*-\varepsilon, t_*+\varepsilon)}$ непрерывно. Тем самым непрерывность Γ доказана. □

Следствие. *Пусть $p : E \to B$ — накрытие, и $p(x) = b$. Тогда для произвольного непрерывного отображения $\gamma : [0,1]^n \to B$ такого, что $\gamma(0,\dots,0) = b$, существует и единственно непрерывное отображение $\Gamma : [0,1]^n \to E$ такое, что $\Gamma(0,\dots,0) = x$.*

Теорема 1. *Пусть $p : E \to B$ — накрытие, и $p(x) = b$. Тогда гомоморфизм групп $p_* : \pi_1(E,x) \to \pi_1(B,b)$ — мономорфизм.*

Доказательство. Пусть $\gamma : [0,1] \to E$, $\gamma(0) = \gamma(1) = x$, — петля, класс гомотопии которой принадлежит $\operatorname{Ker} p_*$. Это означает, что существует гомотопия $f : [0,1]^2 \to B$ такая, что $f(0,s) = f(1,s) = b$, $f(t,0) = p(\gamma(t))$ и $f(t,1) = b$ для всех $t, s \in [0,1]$. По теореме о накрывающей гомотопии (лемма 2) существует поднятие этой гомотопии, т.е. непрерывное отображение $F : [0,1]^2 \to E$ такое, что $p(F(t,s)) = f(t,s)$, $F(0,0) = x$ и $F(t,0) = \gamma(t)$ для всех t, s. Поскольку $p(F(0,s)) = p(F(1,s)) = b$, а $p^{-1}(b)$ дискретно, получаем $F(0,s) = const. = F(0,0) = x$ и $F(1,s) = const. = F(1,0) = \gamma(1) = x$. Кроме того, $F(t,1) \in p^{-1}(b)$ также постоянно, так что $F(t,1) = F(0,1) = x$. Таким образом, F — стягивание петли γ в точку x, то есть класс гомотопии γ — единичный элемент $\pi_1(E,x)$. □

Таким образом, $\pi_1(E,x)$ изоморфна образу $p_*(\pi_1(E,x)) \overset{\text{def}}{=} G \subset p_*(B,b)$. Пусть $\gamma : [0,1] \to B$ — петля. $\gamma(0) = \gamma(1) = b$. Согласно лемме 1 существует единственный путь $\Gamma : [0,1] \to E$, для которого $p \circ \Gamma = \gamma$ и $\Gamma(0) = x$. Рассмотрим точку $\Gamma(1) \in p^{-1}(\gamma)$. В силу леммы 2 эта точка непрерывно меняется при гомотопии пути γ, а поскольку множество $p^{-1}(\gamma)$ дискретно — не меняется вовсе. Следовательно, $\Gamma(1)$ зависит только от класса гомотопии $[\gamma] \in \pi_1(B,b)$; обозначим ее $\xi([\gamma])$.

Теорема 2. $\xi(\alpha_1) = \xi(\alpha_2)$ *тогда и только тогда, когда* $\alpha_1 \alpha_2^{-1} \in p_*(\pi_1(E,x)) \subset \pi_1(B,b)$. *Отображение* ξ *является взаимно однозначным соответствием* $p^{-1}(b)$ *и множества смежных классов* $\pi_1(B,b)/p_*(\pi_1(E,x))$.

Доказательство. Пусть кривые γ_1 и γ_2 — представители классов α_1 и α_2, а Γ_1 и Γ_2 — их поднятия. Если $\xi(\alpha_1) = \Gamma_1(1) = \Gamma_2(1) = \xi(\alpha_2)$, то $\Gamma_1 \cdot \Gamma_2^{-1}$ — петля в пространстве E. Тогда $\gamma_1 \cdot \gamma_2^{-1} = p \circ (\Gamma_1 \cdot \Gamma_2^{-1})$, откуда $\alpha_1 \alpha_2^{-1} \in p_*(\pi_1(E,x))$.

Обратно, пусть $\alpha_1 \alpha_2^{-1} \in p_*(\pi_1(E,x))$, и пусть Γ — поднятие петли $\gamma_1 \cdot \gamma_2^{-1}$. В силу единственности поднятия Γ — петля, поэтому $\xi_1(\alpha_1) = \Gamma(1/2) = \xi(\alpha_2)$.

Отсюда вытекает, что отображение $\xi : \pi_1(B,b)/p_*(\pi_1(E,x)) \to p^{-1}(b)$ корректно определено и инъективно. Сюръективность: пусть $y \in p^{-1}(b)$. Поскольку E линейно связно, существует путь $\Gamma : [0,1] \to E$, для которого $\Gamma(0) = x$ и $\Gamma(1) = y$. Тогда $y = \xi([\gamma])$, где $\gamma = p \circ \Gamma$. □