ЛЕКЦИЯ 5

Краткое содержание. Категория накрытий.

Пусть B — линейно связное локально односвязное пространство, а $p : E \to B$ — накрытие, причем E также линейно связно. Поскольку p отображает малые окрестности точек E гомеоморфно на малые окрестности точек B, пространство E также локально односвязно.

Докажем важную техническую лемму:

Лемма 1. *Пусть B и E — линейно связные локально односвязные пространства, а $p : E \to B$ — непрерывное отображение; пусть $b \in B$, $x \in E$ и $p(x) = b$. Предположим, что прообраз $p^{-1}(b) \subset E$ дискретен и отображение p обладает свойством поднятия путей: для произвольного пути $\gamma : [0,1] \to B$ такого, что $\gamma(0) = b$, существует и единствен путь $\Gamma : [0,1] \to E$ такой, что $p \circ \Gamma = \gamma$ и $\Gamma(0) = x$. Тогда p является накрытием.*

Доказательство. Обозначим $F \stackrel{\text{def}}{=} p^{-1}(b)$ и рассмотрим произвольную точку $a \in B$. Поскольку B линейно связно, существует путь γ, соединяющий a с b. Возьмем в качестве $U \ni a$ произвольную односвязную окрестность. Для любой точки $c \in U$ существует ровно один, с точностью до гомотопии с фиксированными концами, путь $\delta_c : [0,1] \to U$ такой, что $\delta_c(0) = c$, $\delta_c(1) = a$; тогда путь $\delta_c \cdot \gamma$ соединяет c и b.

Согласно свойству поднятия путей для всякой точки $x \in p^{-1}(c)$ существует и единствен путь $\Phi : [0,1] \to E$ такой, что $p \circ \Phi = \delta_c \cdot \gamma$ и $\Phi(0) = x$. Положим по определению $\lambda(x) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(1) \in p^{-1}(b) = F$; тем самым определено отображение $\lambda : p^{-1}(U) \to F$.

Докажем, что $\Lambda = p \times \lambda : p^{-1}(U) \to U \times F$ — гомеоморфизм. Действительно, для всякого $c \in U$ существует единственный, с точностью до гомотопии, путь δ_c^{-1}, соединяющий a и c. Тогда для всякого $\varphi \in p^{-1}(b) = F$ существует единственное поднятие $\Gamma : [0,1] \to E$ пути $\gamma^{-1} \cdot \delta_c^{-1}$, для которого $\Gamma(0) = \varphi$. Тогда точка $\Gamma(1) \in p^{-1}(c)$ определена однозначно и, очевидно, $\Lambda(\Gamma(1)) = (a, \varphi)$. Следовательно, Λ обратимо. Непрерывность Λ^{-1} вытекает из непрерывности p (докажите!). □

Пусть B — линейно связное локально односвязное пространство. Отметим точку $b \in B$ и рассмотрим категорию $\mathbf{Cover}_{\mathrm{B}}^{(*)}$, объекты которой — тройки (E, p, x), где E — линейно связное пространство, $p : E \to B$ — накрытие, а $x \in E$ — точка, для которой $p(x) = b$. Морфизмом в категории $\mathbf{Cover}_{\mathrm{B}}^{(*)}$ из объекта (E_1, p_1, x_1) в объект (E_2, p_2, x_2) называется непрерывное отображение $f : E_1 \to E_2$ такое, что $p_2 \circ f = p_1$ и $f(x_1) = x_2$; композиция морфизмов — композиция отображений. Тождественное отображение id_E — единичный морфизм; ассоциативность очевидна.

Лемма 2. *Пусть $f : (E_1, p_1, x_1) \to (E_2, p_2, x_2)$ — морфизм категории $\mathbf{Cover}_{\mathrm{B}}^{(*)}$. Тогда отображение $f : E_1 \to E_2$ является накрытием.*

Доказательство. Поскольку $x_2 \in p_2^{-1}(b)$, имеем $f^{-1}(x_2) \subset f^{-1}(p_2^{-1}(b)) = p_1^{-1}(b)$. Тем самым $f^{-1}(x_2)$ — подмножество дискретного пространство и, следовательно, дискретно.

Пусть теперь $\gamma : [0,1] \to E_2$ — путь, и $\gamma(0) = x_2$. Тогда $p_2 \circ \gamma$ — путь в B с начальной точкой b. Поскольку p_1 — накрытие, существует и единствен путь $\Gamma : [0,1] \to E_1$ такой, что $\Gamma(0) = x_1$ и $з_2 \circ \gamma = p_1 \circ \Gamma = p_2 \circ f \circ \Gamma$. Следовательно, $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} f \circ \Gamma$ — путь в E_2, для которого $\Delta(0) = x_2$ и $p_2 \circ \Delta = p_2 \circ \gamma$. В силу единственности поднятия пути (p_2 — накрытие!) имеем $\Delta = \gamma$ — следовательно, отображение f обладает свойством поднятия пути. Согласно лемме 1 f — накрытие. □

Объект a категории M называется инициальным, если если для каждого объекта b имеется ровно один морфизм $f_b : a \to b$. Инициальный объект, если существует, может не быть единственным, но очевидно, что любые два инициальных объекта изоморфны.

Пример 1. В категории множеств есть единственный инициальный объект — пустое множество.

В категории $\mathbf{Subgr}_{\mathrm{G}}$, объекты которой — подгруппы заданной группы G, а морфизмы — вложения подгрупп, также имеется единственный инициальный объект — подгруппа, состоящая только из единичного элемента.

Теорема 1. *Пусть B линейно связно и локально односвязно. Тогда в категории $\mathbf{Cover}_{\mathrm{B}}^{(*)}$ имеется инициальный объект (E_0, p_0, x_0) (называемый универсальным накрытием); пространство E_0 такого объекта односвязно.*

Доказательство. Возьмем в качестве E_0 совокупность морфизмов вида $\ell : b \to a$ фундаментального группоида пространства B. Иными словами, E_0 это множество классов гомотопии путей $\gamma : [0,1] \to B$ таких, что $\gamma(0) = b$; под гомотопией путей понимается гомотопия с фиксированными концами, т.е. непрерывное отображение $F : [0,1]^2 \to B$ такое, что $F(t,0) = \gamma(t)$, $F(0,s) = b$ и $F(1,s) = const. = \gamma(1)$ при всех $t, s \in [0,1]$. Отображение $p_0 : E_0 \to B$ сопоставляет каждому морфизму $\ell : b \to a$ точку $a \in B$ (то есть каждому классу гомотопии путей γ — точку $\gamma(1)$).

Теперь нужно ввести в E_0 топологию. Пусть $U \subset B$ — открытое множество, и $x \in E_0$ таково, что $p_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} q \in U$ (т.е. x — класс гомотопии путей γ таких, что $\gamma(0) = b$ и $\gamma(1) \stackrel{\text{def}}{=} q \in U$). Обозначим $V(x,U)$ множество классов гомотопии путей вида $x \cdot y$, где y — класс гомотопии путей δ таких, что $\delta(0) = q$ и $\delta(t) \in U$ при всех t. Множества $V(x,U)$ составляют базу топологии в E_0: множество $\mathcal{U} \subset E_0$ называется открытым, если для всякого $x \in \mathcal{U}$ существует окрестность $U \subset B$ точки $q \stackrel{\text{def}}{=} p_0(x)$ такая, что $V(x,U) \subset \mathcal{U}$.

Прообраз $p_0^{-1}(b) \subset E_0$ это фундаментальная группа $\pi_1(B,b)$. Из локальной односвязности B немедленно вытекает, что $p_0^{-1}(b)$ дискретен. Пусть теперь $\gamma : [0,1] \to B$ — произвольный путь, $\gamma(0) = b$, а $x = [\delta] \in E_0$ — произвольная точка, для которой $p_0(x) = b$, то есть δ — петля: $\delta(0) = \delta(1) = b$. Положим $\Gamma(s) = [\delta \cdot \gamma_s]$, $0 \le s \le 1$, где путь $\gamma_s(t) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma(st)$. Тогда Γ — путь в E_0, $\Gamma(0) = x$ и $p_0 \circ \Gamma = \gamma$; нетрудно видеть, что Γ — единственный путь, обладающий такими свойствами. Следовательно, отображение $p_0 : E_0 \to B$ обладает свойством поднятия пути и, согласно лемме 1, является накрытием.

Пусть теперь $p_1 : E_1 \to B$ — другое накрытие, $x_1 \in p_1^{-1}(b) \subset E_1$. Возьмем $[\gamma] \in E_0$; тогда $p_0 \circ \gamma : [0,1] \to B$ — путь с началом в b. По теореме о поднятии пути существует и единствен путь $\Gamma_1 : [0,1] \to E_1$ такой, что $p_1 \circ \Gamma_1 = \gamma$ и $\Gamma_1(0) = x_1$. Положим $f([\gamma]) \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_1(1) \in E_1$; как нетрудно убедиться, f является морфизмом $(E_0, p_0, x) \to (E_1, p_1, x_1)$, причем единственным. Тем самым доказано, что (E_0, p_0, x) — инициальный объект категории $\mathbf{Cover}_{\mathrm{B}}^{(*)}$.

Докажем, что E_0 односвязно. Линейная связность: путь, соединяющий x с произвольным элементом $[\gamma] \in E_0$, есть $[\gamma_s]$, $0 \le s \le 1$, где $\gamma_s(t) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma(st)$. Пусть теперь φ — петля в E_0 с началом в x. Рассмотрим петлю $\gamma = p_0 \circ \varphi$ в B; тогда φ является ее поднятием. Отсюда вытекает, что $\varphi(s) = [t \mapsto \gamma(st)]$. Вот гомотопия, соединяющая петлю φ с тождественной петлей: $\Phi(u,s) = [t \mapsto \gamma(ust)]$. □

Сопоставим теперь каждому объекту (E,p,x) категории $\mathbf{Cover}_{\mathrm{B}}^{(*)}$ группу $\mathcal{G}(E,p,x) = p_*(\pi_1(E,x)) \subset \pi_1(B,b)$, а каждому морфизму $f : (E_1,p_1,x_1) \to (E_2,p_2,x_2)$ — гомоморфизм групп $\mathcal{G}(f) = (p_2)_* f_* (p_1)_*^{-1} : \mathcal{G}(E_1,p_1,x_1) \to \mathcal{G}(E_2,p_2,x_2)$. Согласно лемме 2 f — накрытие. Поскольку $p_1 = p_2 \circ f$, имеем $(p_1)_* = (p_2)_* \circ f_*$, откуда вытекает, что если морфизм f существует, то $\mathcal{G}(E_1,p_1,x_1) \subset \mathcal{G}(E_2,p_2,x_2)$, а $\mathcal{G}(f)$ — тавтологическое вложение (каждый элемент $\mathcal{G}(E_1,p_1,x_1)$ переходит в себя, но уже в подгруппе $\mathcal{G}(E_2,p_2,x_2)$). Тем самым определен функтор $\mathcal{G}$ из категории $\mathbf{Cover}_{\mathrm{B}}^{(*)}$ в категорию $\mathbf{Subgr}_{\pi_1(\mathrm{B},\mathrm{b})}$, определенную в примере 1.

Теорема 2. *Для всякой подгруппы $G \subset \pi_1(B,b)$ существует объект (E,p,x) категории $\mathbf{Cover}_{\mathrm{B}}^{(*)}$ такой, что $\mathcal{G}(E,p,x) = G$.*

Доказательство. Рассмотрим универсальное накрытие E_0 с базой B и отождествим любые два элемента $[\gamma_1] \in E_0$ и $[\gamma_2] \in E_0$, если $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ и $(p_0)_*(\gamma_1 \cdot \gamma_2^{-1}) \in G \subset \pi_1(B,b)$. Полученное после всех отождествлений фактор-пространство обозначим E; пусть $\psi : E_0 \to E$ — отображение факторизации (сопоставляющее каждой точке $[\gamma] \in E_0$ точку E, полученную склеиванием $[\gamma]$ с другими точками). Отображение ψ не обратимо, но если $\psi([\gamma_1]) = \psi([\gamma_2])$, то обязательно $p_0([\gamma_1]) = p_0([\gamma_2])$ — тем самым, можно определить отображение $p : E \to B$ формулой $p = p_0 \circ \psi^{-1}$. Обозначим $x \stackrel{\text{def}}{=} \psi(x_0) \in E$.

Из конструкции пространства E вытекает, что $p^{-1}(b) \subset E$ получено факторизацией дискретного множества $p_0^{-1}(b) \subset E_0$ и, следовательно, дискретно. Для произвольного пути $\gamma : [0,1] \to B$, $\gamma(0) = b$, и пусть $\Gamma_0 : [0,1] \to E_0$ — поднятие этого пути, $\Gamma_0(0) = x_0$. Положим $\Gamma = \psi \circ \Gamma_0$ — тогда $p \circ \Gamma = \gamma$ и $\Gamma(0) = x$. Таким образом, $p : E \to B$ обладает свойством подъема путей и, следовательно, является накрытием; слой этого накрытия находится во взаимно однозначным соответствии с множеством смежных классов $\pi_1(B.b)/G$.

Пусть теперь $\gamma : [0,1] \to E$ — петля; $\gamma(0) = \gamma(1) = y \stackrel{\text{def}}{=} \psi(x)$. Поскольку $p(\gamma(1)) = b$, класс гомотопии петли $p \circ \gamma : [0,1] \to B$ принадлежит G; таким образом, $p_*(\pi_1(E,y)) \subset G$. С другой стороны, рассмотрим петлю $\Gamma : [0,1] \to B$, $\Gamma(0) = \Gamma(1) = b$, такую что $[\Gamma] \in G$. По теореме о поднятии пути существует путь $\gamma : [0,1] \to E$ такой, что $\Gamma = p \circ \gamma$ и $\gamma(0) = y$; поскольку $[\Gamma] \in G$, имеем $\gamma(1) = y$. Таким образом, γ — петля, $[\Gamma] = p_*([\gamma])$, так что $p_*(\pi_1(E,y)) = G$. □

Теорема 3. *Пусть (E_1,p_1,x_1) и (E_2,p_2,x_2) — объекты категории $\mathbf{Cover}_{\mathrm{B}}^{(*)}$, причем $\mathcal{G}(E_1,p_1,x_1) \subset \mathcal{G}(E_2,p_2,x_2)$, то между этими объектами существует морфизм f, причем единственный.*

Доказательство. Существование морфизма f. Пусть $x \in E_1$. Поскольку E_1 линейно связно, существует путь $\gamma : [0,1] \to E_1$ такой, что $\gamma(0) = x_1$, $\gamma(1) = x$. Обозначим $\Gamma : [0,1] \to E_2$ поднятие пути $p_1 \circ \gamma : [0,1] \to B$ такое, что $\Gamma(0) = x_2$, и положим $f(x) = \Gamma(1)$. Если $\gamma' : [0,1] \to E_1$ — другой путь, соединяющий x_1 с x, а Γ' —

соответствующее поднятие, то $(p_1)_*(\gamma \circ (\gamma')^{-1}) \in \mathcal{G}(E_1, p_1, x_1)$. Следовательно, $(p_1)_*(\gamma \circ (\gamma')^{-1}) \in \mathcal{G}(E_2, p_2, x_2)$, откуда вытекает, что $\Gamma(1) = \Gamma'(1)$, и отображение f определено корректно. По построению $p_1 = p_2 \circ f$; непрерывность f очевидна.

Единственность морфизма f. Пусть $f' : E_1 \to E_2$ — другой морфизм, $f'(x_1) = x_2$. Для любого $x \in E_1$ и произвольного пути $\gamma : [0,1] \to E_1$, соединяющего x_1 с x, имеем $p_2 \circ f' \circ \gamma = p_1 \circ \gamma$. Отсюда вытекает, что $f' \circ \gamma : [0,1] \to E_2$ — поднятие пути $p_1 \circ \gamma : [0,1] \to B$. Поскольку поднятие единственно, $f' \circ \gamma = \Gamma$, откуда $f'(x) = f'(\gamma(1)) = \Gamma(1) = f(x)$. $\square$

Следствие 1. *Если* $\mathcal{G}(E_1, p_1, x_1) = \mathcal{G}(E_2, p_2, x_2)$, *то объекты* (E_1, p_1, x_1) *и* (E_2, p_2, x_2) *изоморфны.*

Следствие 2. *Между любыми двумя объектами категории* $\mathbf{Cover}_{\mathrm{B}}^{(*)}$ *существует не более одного морфизма.*

Следствие 2 позволяет профакторизовать категорию $\mathbf{Cover}_{\mathrm{B}}^{(*)}$ по изоморфизмам, то есть определить категорию $\mathbf{Cover}_{\mathrm{B}}^{\sim}$, объектами которой являются классы изоморфных объектов категории $\mathbf{Cover}_{\mathrm{B}}^{(*)}$. В $\mathbf{Cover}_{\mathrm{B}}^{\sim}$ между объектами a и b имеется единственный морфизм, если такой морфизм существует между какими-то (и, следовательно, любыми) объектами α и β категории $\mathbf{Cover}_{\mathrm{B}}^{(*)}$, принадлежащими классам изоморфизма a и b; в противном случае морфизмов $a \to b$ не существует. Композиция морфизмов определяется очевидным образом. Тогда доказанные выше утверждения про функтор $\mathcal{G}$ можно свести воедино так: функтор $\mathcal{G}$ является эквивалентностью категорий (обратимым функтором) $\mathbf{Cover}_{\mathrm{B}}^{\sim}$ и $\mathbf{Subgr}_{\pi_1(\mathrm{B},\mathrm{b})}$.