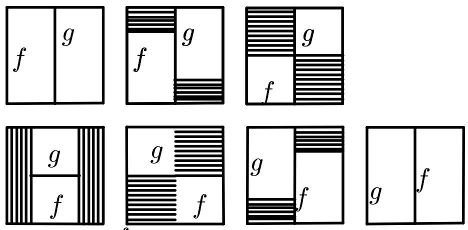
ЛЕКЦИЯ 6

Краткое содержание. Старшие гомотопические группы.

Пусть X — топологическое пространство, $b \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Определим функтор π_n из фундаментального группоида $\Pi_1(X)$ в категорию групп (в коорой объекты — группы, а морфизмы — гомоморфизмы групп). Каждому объекту $\Pi_1(X)$, то есть точке $b \in X$, сопоставим *n-ую гомотопическую группу* $\pi_n(X, b)$. Ее элементы — всевозможные классы гомотопии непрерывных отображений $f : [0,1]^n \to X$ таких, что $f(\partial[0,1]^n) = b$ (при гомотопии последнее условие тоже должно сохраняться). Произведение классов гомотопии a и b определяется так: берутся произвольные представители $f \in a$ и $g \in b$ этих классов и в качестве ab берется класс гомотопии отображения $(fg)(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} f(2x_1, x_2, \dots, x_n), & 0 \le x_1 \le 1/2, \\ g(2x_1 - 1, x_2, \dots, x_n), & 1/2 \le x_1 \le 1. \end{cases}$.

Лемма 1. *Определение умножения в $\pi_n(X, b)$ корректно и задает в $\pi_n(X, b)$ структуру группы. При $n \ge 2$ эта группа коммутативна.*



Доказательство. Доказательство первого утверждения — такое же, как для фундаментальной группы.
Коммутативность $\pi_n(X, b)$ означает, что отображения fg и gf для произвольных f и g гомотопны. Гомотопия при $n = 2$ показана на рисунке (заштрихованные области отображаются в отмеченную точку b); при произвольном $n \ge 2$ конструкция такая же. □

Поскольку вся граница $\partial[0,1]^n$ куба переходит при отображении f в одну точку, f можно считать отображением куба, все точки границы которого склеены в одну точку p_0, в пространство X, причем $f(p_0) = b$. Куб $[0,1]^n$, граница которого склеена в точку, гомеоморфен сфере S^n. Таким образом, $\pi_n(X, b)$ можно определить как множество классов гомотопии отображений $S^n \to X$, переводящих отмеченную точку $p_0 \in S^n$ в b (такие отображения называются сфероидами).

Морфизму $b_0 \to b_1$ категории $\Pi_1(X)$, то есть классу гомотопии $[\gamma]$, где $\gamma : [0,1] \to X$, $\gamma(0) = b_0$, $\gamma(1) = b_1$, сопоставляется гомоморфизм групп $\pi_n([\gamma]) : \pi_n(X, b_0) \to \pi_n(X, b_1)$. Для определения гомоморфизма $\pi_n([\gamma])$ отождествим куб $[0,1]^n$ с n-мерным шаром B_n единичного радиуса с центром в начале координат с помощью центральной проекции: $\varrho(x_1, \dots, x_n) = 2x \max_{i=1}^n(|x_i - 1/2|)/|x - (1/2, \dots, 1/2)|$ (и по определению $\varrho(1/2, \dots, 1/2) = (0, \dots, 0)$ — центр шара). Пусть теперь $f : B_n \to X$, $f|_{\partial B_n} = b_1$ — сфероид. Тогда по определению $\pi_n([\gamma])([f])(x) = f(2x)$ при $0 \le |x| \le 1/2$ и $\pi_n([\gamma])([f])(x) = \gamma(2|x| - 1)$ при $1/2 \le |x| \le 1$.

Нетрудно видеть (проверьте!), что это действительно функтор (т.е. гомотопический класс $\pi_n([\gamma])([f])$ не меняется при гомотопии γ и f, и $\pi_n([\gamma_1 \cdot \gamma_2]) = \pi_n([\gamma_1]) \circ \pi_n([\gamma_2])$). Из функториальности вытекает, что $\pi_n([\gamma])$ — изоморфизм групп (поскольку $\Pi_1(X)$ — группоид). В частности, если X линейно связно, то группы $\pi_n(X, b)$ для всех точек b изоморфны; в этом случае часто пишут просто $\pi_n(X)$.

Любому непрерывному отображению $f : X \to Y$ соответствует отображение групп $f_* : \pi_n(X, b) \to \pi_n(Y, f(b))$: для класса гомотопии $a \in \pi_n(X, b)$ возьмем его произвольный представитель $\varphi \in a$; тогда $f_*(a)$ это класс гомотопии сфероида $f \circ \varphi : [0,1]^n \to Y$.

Лемма 2. *Отображение f_* определено корректно (класс гомотопии $f \circ \varphi$ не зависит от выбора представителя $\varphi \in a$) и является гомоморфизмом групп. Если $g : X \to Y$ и $f : Y \to Z$ — непрерывные отображения, то $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$. Если $f_t : X \to Y$, $0 \le t \le 1$, — гомотопия, то $(f_1)_* = \pi_n([\gamma]) \circ (f_0)_*$, где $\gamma(t) \stackrel{def}{=} f_t(b)$.*

Следствие 1. *Гомотопические группы гомотопически эквивалентных линейно связных пространств изоморфны.*

Доказательство леммы и следствия стандартное (нужно построить несколько гомотопий) и остается в качестве упражнения. Первые два утверждения леммы означают, что π_n — функтор из категории линейно связных топологических пространств в категорию групп. Наличие члена $\pi_n([\gamma])$ в последнем равенстве леммы означает, что, несмотря на следствие, π_n не является функтором из гомотопической категории в категорию групп.

Теорема 1. *Пусть B — линейно связное локально односвязное пространство, $b \in B$, отображение $p : E \to B$ — накрытие, и $x \in p^{-1}(b)$. Тогда гомоморфизм $p_* : \pi_n(E, x) \to \pi_n(B, b)$ при $n \ge 2$ — изоморфизм.*

Доказательство. То, что p_* — мономорфизм, доказывается при всех n так же, как при $n = 1$ — см. доказательство теоремы 1 в лекции 4.

Эпиморфность p_*: пусть $n \geq 2$ и $f : [0,1]^n \to B$ — сфероид, $f(\partial[0,1]^n) = b$. Представим f как гомотопию отображений $g_t(x_1, \dots, x_{n-1}) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_1, \dots, x_{n-1}, t)$, $0 \leq t \leq 1$, $g_t : [0,1]^{n-1} \to B$; при этом $g_0([0,1]^{n-1}) = g_1([0,1]^{n-1}) = b$ и $g_t(\partial[0,1]^{n-1}) = b$. По теореме о накрывающей гомотопии существует гомотопия $G_t : [0,1]^{n-1} \to E$, $p \circ G_t = g_t$ и $G_0([0,1]^{n-1}) = x$. Положим $F(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} G_{x_n}(x_1, \dots, x_{n-1})$; тогда $F(\partial[0,1]^n) \subset p^{-1}(b)$. Поскольку $n \geq 2$, пространство $\partial[0,1]^n$ линейно связно (именно в этом месте используется условие $n \geq 2$), а поскольку $p^{-1}(b)$ дискретно, множество $F(\partial[0,1]^n)$ состоит при из одной точки, а именно точки $F(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = G_0(x_1, \dots, x_{n-1}) = x$. Тем самым $F : [0,1]^n \to E$ — сфероид, $[f] = p_*([F])$, и эпиморфность доказана. □

Пример 1. Универсальное накрытие над букетом k окружностей $S^1 \vee \dots \vee S^1$ — стягиваемый граф Γ (бесконечное дерево, каждая вершина которого имеет валентность $2k$). Из теоремы 1 вытекает, что $\pi_n(S^1 \vee \dots \vee S^1) = \pi_n(\Gamma)$ при $n \geq 2$, а из следствия 1 вытекает, что обе группы тривиальны.

Сфера $\Sigma_{g,k}$ с g ручками и k вырезанными дырками гомотопически эквивалента букету $2g + k - 1$ окружностей — следовательно, $\pi_n(\Sigma_{g,k}) = 0$. Сферу Σ_g с $g \geq 1$ ручками (и без дырок) можно представить как тор с дыркой, к которому по границе дырки приклеена сфера $\Sigma_{g-1,1}$ с $g - 1$ ручками и дыркой. Тогда существует накрытие $p : C \to \Sigma_g$, где C — цилиндр $S^1 \times \mathbb{R}$ (накрывающий тор), в котором вырезано счетное число дырок, к каждой из которых приклеена $\Sigma_{g-1,1}$. Пусть $f : S^n \to C$ — сфероид. Поскольку сфера компактна, существует отрезок $[a,b] \subset \mathbb{R}$ такой, что $f(S^n) \subset C_{a,b}$, где $C_{a,b} \subset C$ — произведение $S^1 \times [a,b]$ с несколькими приклеенными $\Sigma_{g-1,1}$ (теми, чьи точки приклейки пришлись на отрезок $[a,b] \subset \mathbb{R}$). Очевидно, $C_{a,b}$ гомеоморфно $\Sigma_{h,2}$ при некотором h (две дырки это граничные окружности цилиндра), так что $\pi_n(C_{a,b}) = 0$ и сфероид f стягиваем. Тем самым любой сфероид в C стягиваем, и $\pi_n(\Sigma_g) = \pi_n(C) = 0$.

Теорема 2. *Группа $\pi_k(S^n) = 0$ при $k < n$.*

Доказательство. Стандартным n-мерным симплексом называется выпуклое множество $\{(x_0, \dots, x_n) \mid x_0, \dots, x_n \geq 0, x_0 + \dots + x_n = 1\}$; n-мерным симплексом называется образ стандартного симплекса при обратимом аффинном ("линейном неоднородном") отображении. Барицентрическим разбиением стандартного симплекса называется разбиение его на симплексы $\{(x_0, \dots, x_n) \mid 0 \leq x_{i_0} \leq \dots \leq x_{i_n}, x_0 + \dots + x_n = 1\}$, где $i_0, \dots, i_n$ — перестановка индексов $0, 1, \dots, n$; таким образом, в барицентрическом подразделении $n!$ симплексов. Барицентрическое подразделение произвольного сиплекса — образ барицентрического подразделения стандартного симплекса при соответствующем аффинном отображении.

В качестве сферы S^n будем рассматривать сферу единичного радиуса в $\mathbb{R}^{n+1}$ с центром в начале координат. Триангуляцией сферы S^n называется конечный набор точек $a_1, \dots, a_N \in S^n$ таких, что каждая грань выпуклой оболочки $\mathrm{co}(a_1, \dots, a_N)$ этих точек является симплексом (гранью триангуляции). Барицентрическим подразделением триангуляции $a_1, \dots, a_N$ называется множество точек $b_1, \dots, b_M$, полученных проекцией из начала координат на сферу вершин барицентрического подразделения каждой грани триангуляции $a_1, \dots, a_N$.

Непрерывное отображение $f : S^n \to \mathbb{R}^m$ называется кусочно-линейным, если найдется триангуляция сферы $a_1, \dots, a_N$, и для каждой грани $\Phi \subset \mathrm{co}(a_1, \dots, a_N)$ — аффинное отображение $F_\Phi : \Phi \to \mathbb{R}^m$ такое, что $f|_{p^{-1}(\Phi)} = F_\Phi \circ p$; здесь $p : S^n \to \mathrm{co}(a_1, \dots, a_N)$ — проекция из начала координат. Тем самым $f(a_i) = F_\Phi(a_i)$, где Φ — любая грань, которой принадлежит вершина a_i; поскольку аффинное отображение симплекса однозначно задается образами его вершин, кусочно-линейное отображение сферы однозначно задается триангуляцией $a_1, \dots, a_N \in S^n$ и образами $f(a_i) \in \mathbb{R}^m$.

Рассмотрим произвольное непрерывное отображение $f : S^k \to S^n$. Поскольку сферы компактны, f равномерно непрерывно, и существует $\varepsilon > 0$ такое, что если $|x - y| < \varepsilon$, то $|f(x) - f(y)|$ меньше половины радиуса сферы. Рассмотрим теперь произвольную триангуляцию сферы S^k (например, $k + 2$ вершины произвольного $(k+1)$-мерного симплекса) и сделаем ее барицентрическое подразделение несколько раз так, чтобы получилась триангуляция $a_1, \dots, a_N$, у которой диаметр каждой грани меньше ε. Пусть теперь g — кусочно-линейное отображение, совпадающее с f в точках $a_1, \dots, a_N$. Тогда в силу выбора точек образ g не содержит начала координат и определено отображение $F : S^k \to S^n$ — композиция g с проекцией из начала координат на сферу S^n. Очевидно, для всякого $a \in S^k$ расстояние между точками $f(a)$ и $F(a)$ не превышает четверти большого круга сферы S^n — следовательно, эти точки можно соединить единственной кратчайшей дугой большого круга. Сдвигая точки равномерно вдоль этой дуги, получим гомотопию между отображениями f и F. Тем самым доказано, что всякое непрерывное отображение $S^k \to S^n$ гомотопно композиции кусочно-линейного и проекции из начала координат на сферу; для краткости будем говорить "кусочно-линейное отображение сфер".

Поскольку $k < n$, множество $F(S^k)$ лежит в пересечении S^n с конечным набором подпространств размерности не выше k. Тем самым $F(S^k) \neq S^n$, и F можно рассматривать как отображение $S^k \to S^n \setminus \{b\}$

для произвольной точки $b \in S^n \setminus F(S^k)$. Поскольку $S^n \setminus \{b\}$ стягиваемо (гомотопически эквивалентно точке), отображение F гомотопно отображению в точку — следовательно, f также гомотопно отображению в точку, что доказывает теорему. $\square$