ЛЕКЦИЯ 7

Краткое содержание. $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$.

Теорема 1. *Группа $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$; образующей является класс гомотопии тождественного отображения* $\mathrm{id} : S^n \to S^n$

Доказательство. Вложим S^{n-1} в S^n в качестве экватора и соединим каждую точку экватора дугами большого круга (меридианами) с полюсами. Теперь у каждой точки $c \in S^n$ имеется широта $\psi(c) \in [-\pi/2, +\pi/2])$ и, если c не является полюсом, долгота $\varphi(c) \in S^{n-1}$. Произвольному непрерывному отображению $g : S^{n-1} \to S^{n-1}$ можно сопоставить его надстройку — отображение $\Sigma g : S^{n-1} \to S^{n-1}$ такое, что $\varphi(\Sigma g(c)) = g(\varphi(c))$ и $\psi(\Sigma g(c)) = \psi(c)$ (полюсы переходят в себя). Очевидно, что если g_0 гомотопно g_1, то Σg_0 гомотопно Σg_1, так что Σ является отображением $\pi_{n-1}(S^{n-1}) \to \pi_n(S^n)$; нетрудно проверить, что это гомоморфизм групп. Докажем, что Σ — изоморфизм; отсюда по индукции последует второе утверждение теоремы, поскольку $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, образующей $\pi_1(S^1)$ является класс гомотопии тождественного отображения, и отображение Σ переводит тождественное отображение в тождественное.

Рассмотрим отображение $f : S^n \to S^n$, и пусть a и b — северный и южный полюсы сферы-образа S^n. Как и в теореме 2 лекции 6 отображение f гомотопно кусочно-линейному, которое мы тоже обозначим f. Прообразы полюсов при кусочно-линейном отображении f состоят из конечного числа точек: $f^{-1}(a) = \{u_1, \dots, u_s\}$ и $f^{-1}(b) = \{v_1, \dots, v_r\}$. Существует семейство (постройте!) $\mu_t : S^n \to S^n$, $0 \le t \le 1$ гомеоморфизмов сферы в себя, для которого $\mu_0 = \mathrm{id}$, а $\mu_1(u_i)$ лежит в северном полушарии, и $\mu_1(v_i)$ — в южном. Отображение $f \circ \mu_1$ гомотопно f и обладает таким свойством: прообразы a и b лежат в северном и южном полушарии соответственно. Мы обозначим $f \circ \mu_1$ опять f.

Рассмотрим “полярные шапочки” $U \ni a$ и $V \ni b$ такие, что $f^{-1}(U)$ и $f^{-1}(V)$ не пересекаются с экватором сферы-прообраза — они существуют, потому что экватор замкнут и его образ не содержит a и b. Существует (постройте!) семейство непрерывных отображений $\nu_t : S^n \to S^n$, $0 \le t \le 1$, такое что $\nu_0 = \mathrm{id}$, $\nu_t(c) = c$ при всех t для каждой точки c, лежащей на экваторе сферы-образа S^n, и ν_t отображает U на все северное полушарие, а V — на все южное. Отображение $\nu_1 \circ f$ гомотопно f (и будет теперь обозначаться f), переводит экватор S^n в экватор, северное полушарие в северное, а южное в южное. Еще одной гомотопией можно добиться (как?), чтобы отображение f переводило северный полюс в северный, а южный — в южный.

Построим теперь гомотопию $\xi_t : S^n \to S^n$, $0 \le t \le 1$, заданную в координатах “широта-долгота” следующим образом. Пусть в этих координатах построенное выше отображение есть $f(\psi, \varphi) = (g(\psi, \varphi), h(\psi, \varphi))$; для него $g(0, \varphi) = 0$, $g(\pm\pi/2, \varphi) = \pm\pi/2$. Тогда положим

$$\xi_t(\psi, \varphi) = \begin{cases} \big(\psi, h(0, \varphi)\big), & -\pi t/2 \le \psi \le \pi t/2 \\ \big((1-t) g(\frac{\psi - \pi t/2}{1-t}, \varphi) + \frac{\pi t}{2}, h(\frac{\psi - \pi t/2}{1-t}, \varphi)\big), & \pi t/2 \le \psi \le \pi/2, \end{cases}$$

при отрицательном ψ аналогично. Тогда $\xi_0 = f$, ξ_1 — надстройка над ограничением f на экватор сферы. Тем самым всякое отображение $f : S^n \to S^n$ гомотопно надстройке, и Σ — эпиморфизм.

Применим теперь индукцию по n. Если уже доказано что $\pi_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}$, то из эпиморфности Σ следует, что $\pi_n(S^n)$ либо изоморфна $\mathbb{Z}$, либо является конечной циклической группой. Чтобы исключить вторую возможность, построим эпиморфизм $\deg : \pi_n(S^n) \to \mathbb{Z}$ (называемый степенью отображения).

Пусть $x^* = (x_0^*, \dots, x_n^*) \in S^n$. Назовем индекс i, $0 \le i \le n$, регулярным в точке x^*, если $x_i^* \ne 0$; в каждой точке есть хотя бы один регулярный индекс. Если индекс i регулярен, то отображение $f_i = (x_0, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n)$ является гомеоморфизмом некоторой окрестности $U \ni x^*$ на открытое множество $V \subset \mathbb{R}^n$.

Пусть $V, W \subset \mathbb{R}^n$ — открытые множества. Отображение $g : V \to W$ — набор n функций $(g_1(y_1, \dots, y_n), \dots, g_n(y_1, \dots, y_n))$ от n действительных переменных. Будем говорить, что отображение g гладко, если функции g_i имеют во всех точках $y \in V$ непрерывные частные производные всех порядков. Величина $J(g, y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \det\left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(y)\right)_{1 \le i,j \le n}$ называется якобианом.

Набор функций $g = (g_1, \dots, g_n)$, определенных в некоторой окрестности U точки $x^* \in S^n$, называется системой координат, если найдется индекс i, регулярный для всех точек $y \in U$ и такой, что отображение $g \circ f_i^{-1} : V \to \mathbb{R}^n$ гладко, и для всякого $y \in U$ якобиан $J(g, y)$ отличен от нуля; здесь $V = f_i(U) \subset \mathbb{R}^n$. Если знак $J(g, y)$ совпадает со знаком x_i^*, то говорят, что система координат правоориентированная, иначе — левоориентированная.

Пусть $f : S^n \to S^n$ — непрерывное отображение. Оно называется гладким, если для каждой точки $a \in S^n$ найдутся правоориентированные системы координат x и y в окрестностях точек a и $f(a)$ соответственно такие, что отображение $f_{xy} = y \circ f \circ x^{-1}$ (определенное и принимающее значения в открытом подмножестве $\mathbb{R}^n$) гладкое. Отображение f_{xy} представляет собой набор n функций от n переменных, так что в каждой точке определен его якобиан. Каждую точку $a \in S^n$ будем называть положительной, отрицательной и критической для отображения f, если якобиан $J(f_{xy}, x(a))$ соответственно положителен, отрицателен или равен нулю. Нетрудно проверить, что деление точек на положительные, отрицательные и критические от выбора правоориентированных координат x и y не зависит. Точка $c \in S^n$ называется регулярным значением, если среди точек $a \in f^{-1}(c)$ нет критических.

Понятие системы координат на $S^n \times [0,1]$, гладкого отображения $S^n \times [0,1] \to S^n$ и $[0,1] \to S^n \times [0,1]$, а также понятие критического значения определяется аналогично соответствующим понятиям для сфер (проделайте!). Понятие правоориентированной системы координат такое: если $(g_1, \dots, g_n)$ — правоориентированная система координат в окрестности точки $x^* \in S^n$, то $(p, g_1, \dots, g_n)$ — правоориентированная система координат в окрестности точки $(x^*, t^*) \in S^n \times [0,1]$ при любом t^*; здесь $p : S^n \times [0,1] \to [0,1]$ — проекция на второй сомножитель. Если $\gamma : [0,1] \to S^n \times [0,1]$ — гладкое отображение, то условие $\gamma'(t) \neq 0$ означает, что если рассмотреть зависимость координат точки $\gamma(s) \in S^n \times [0,1]$ от s в окрестности точки $\gamma(t)$, то хотя бы у одной координаты при $s = t$ производная будет отлична от нуля.

Следующие теоремы — классические результаты анализа, мы будем их использовать, но не будем доказывать.

Теорема 2 (лемма Сарда, теорема Брауна, лемма Тома и т.д.; формулировка для сфер)**.** *Для всякого гладкого отбражения $f : S^n \to S^n$ множество регулярных значений всюду плотно в S^n.*

Теорема 3 (следствие из теоремы Стоуна–Вейерштрасса)**.** *Для всякого непрерывного отображения $f : S^n \to S^n$ и всякого $\varepsilon > 0$ существует гладкое отображение $g : S^n \to S^n$ такое, что $|f(a) - g(a)| < \varepsilon$ для всех точек $a \in S^n$. То же самое верно для отображений $S^n \times [0,1] \to S^n$.*

Теорема 4 (частный случай теоремы о неявной функции)**.** *Если $f : S^n \to S^n$ — гладкое отображение, а $c \in S^n$ — его регулярное значение, то $f^{-1}(c)$ состоит из конечного числа точек. У точки c имеется окрестность U, состоящая только из регулярных значений, и если $d \in U$, то точки множества $f^{-1}(d)$ гладко зависят от d.*

Разность между количеством положительных и отрицательных точек в $f^{-1}(c)$ называется степенью отображения f в c и обозначается $\deg(f, c)$. Из теоремы 4 вытекает, что $\deg(f, c)$ зависит от c локально постоянно — не меняется при достаточно малом шевелении точки c.

Теорема 5 (другой частный случай теоремы о неявной функции)**.** *Пусть $F : S^n \times [0,1] \to S^n$ — гладкое отображение, $c \in S^n$ — его регулярное значение, а $(x_1, \dots, x_n)$ — система координат в окрестности точки c. Тогда прообраз $F^{-1}(c)$ представляет собой объединение конечного числа кривых. Кривая это образ гладкого отображения $\gamma : [0,1] \to S^n \times [0,1]$ такого, что $\gamma'(t) \neq 0$ для всех $t \in [0,1]$, и либо $\gamma(0) = \gamma(1) \in S^n \times (0,1)$ (замкнутая кривая), либо $\gamma(0), \gamma(1) \in S^n \times \{0,1\}$ (незамкнутая кривая). При этом для каждого $t \in [0,1]$ в окрестности точки $\gamma(t) \in S^n \times [0,1]$ существует правоориентированная система координат $(y_0, \dots, y_n)$ такая, что отображение $F_{xy} \stackrel{def}{=} x \circ F \circ y^{-1}$ (т.е. отображение F в координатах x, y) переводит точку $(t_0, t_1, \dots, t_n)$ в $(t_1, \dots, t_n)$, а отображение $y \circ \gamma$ (т.е. кривая γ в координатах) выглядит как $t \mapsto (t, 0, 0, \dots, 0)$.*

Пусть теперь $F : S^n \times [0,1] \to S^n$ — гладкое отображение (гладкая гомотопия); обозначим $F|_{S^n \times \{0\}} \stackrel{\text{def}}{=} f_0 : S^n \to S^n$ и $F|_{S^n \times \{1\}} \stackrel{\text{def}}{=} f_1 : S^n \to S^n$. Пусть сначала $c \in S^n$ — регулярное значение для F, f_0 и f_1. Согласно теореме 5, $F^{-1}(c)$ состоит из конечного числа кривых, причем каждая кривая либо замкнута, либо начинается и кончается в точках множеств $f_0^{-1}(c) \subset S^n \times \{0\}$ и $f_1^{-1}(c) \subset S^n \times \{0\}$; согласно теореме 4, эти множества конечны и каждая точка $f_0^{-1}(c)$ и $f_1^{-1}(c)$ является концом одной из кривых. Тем самым точки $f_0^{-1}(c)$ и $f_1^{-1}(c)$ разбиты на пары $\gamma(0)$, $\gamma(1)$, где γ — кривая.

Пусть $\gamma(0) \in f_0^{-1}(c)$. Рассмотрим систему координат $(y_0, \dots, y_n)$, указанную в теореме 5, в окрестности точки $\gamma(1)$. По теореме о неявной функции стандартная проекция $q : S^n \times [0,1] \to S^n$, ограниченная на подмножество $y_0 = 0$, обратима в окрестности точки $\gamma(1)$. Тем самым в окрестности этой точки возникает система координат $y \circ p^{-1}$ на S^n. Эта система координат плюс координата y_0 составляют систему координат на $S^n \times [0,1]$, причем из теоремы 5 вытекает, что эта система координат правая. Если $\gamma(1) \in S^n \times \{1\}$, то координата y_0, очевидно, “сонаправлена” с проекцией p (производная одной из этих координат по другой положительна), откуда вытекает, что система координат $y \circ p^{-1}$ — правоориентирванная; если же $\gamma(1) \in S^n \times \{0\}$, то знак противоположный, и система координат $y \circ p^{-1}$ — левоориентированная. С другой стороны, отображение F в системе координат $y \circ p^{-1}$ имеет, очевидно, положительный якобиан, откуда вытекает, что точка $\gamma(1) \in F^{-1}(c)$ — положительная, если $\gamma(1) \in S^n \times \{1\}$, и отрицательная в противном случае.

Тем самым точки множеств $f_0^{-1}(c)$ и $f_1^{-1}(c)$ разбиты на пары, причем если парные точки принадлежат разным множествам, то их знаки совпадают, а если одному, то знаки противоположны. Отсюда вытекает, что $\deg(f_0, c) = \deg(f_1, c)$.

Пусть теперь c — регулярное значение для f_0 и f_1 (так что $\deg(f_0, c)$ и $\deg(f_1, c)$ определены), но не для F. Тогда, согласно теореме 2, в любой окрестности c найдется значение $c' \in S^n$, регулярное для f_0, f_1 и F. Тогда $\deg(f_0, c) = \deg(f_0, c')$ и $\deg(f_1, c) = \deg(f_1, c')$ согласно замечанию после теоремы 4, и $\deg(f_0, c') = \deg(f_1, c')$, так что все равно $\deg(f_0, c) = \deg(f_1, c)$.

Пусть теперь c_1, c_2 — регулярные значения отображения $f : S^n \to S^n$. Существует ортогональное преобразование $A : S^n \to S^n$ с определителем 1 такое, что $A(c_1) = c_2$. Тогда, очевидно, $\deg(f \circ A, c_1) = \deg(f, c_2)$. С другой стороны, преобразование A гомотопно тождественному, а, следовательно, существует гладкая гомотопия, соединяющая отображения f и $f \circ A$. По доказанному выше $\deg(f, c_1) = \deg(f \circ A, c_1) = \deg(f, c_2)$, то есть степень гладкого отображения не зависит от выбора регулярного значения и не меняется при гладких гомотопиях.

Пусть теперь отображение $f : S^n \to S^n$ непрерывно. Согласно теореме 3, его можно с любой точностью ε приблизить гладким отображением g. Если g' — другое приближение, то $|g(a) - g'(a)| < 2\varepsilon$. Если ε меньше половины диаметра сферы, то точки $g(a)$ и $g'(a)$ при каждом a можно соединить единственной минимальной дугой большого круга. Это означает, что отображения g и g' гладко гомотопны и, следовательно, их степени равны. Это общее значение степени называется степенью отображения f. Из инвариантности степени гладкого отображения при гладких гомотопиях вытекает инвариантность степени непрерывного отображения при непрерывных гомотопиях (по теореме 3 гомотопию тоже можно приблизить с любой точностью гладким отображением). Тем самым построено отображение $\deg : \pi_n(S^n) \to \mathbb{Z}$. Нетрудно проверить, что это гомоморфизм, и что степень тождественного отображения равна 1. Следовательно, $\deg$ — искомый эпиморфизм.

Теорема 1 доказана. $\square$