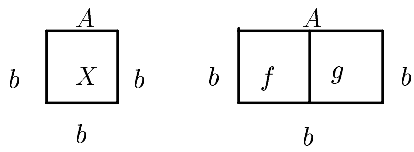
ЛЕКЦИЯ 8

Краткое содержание. Относительные гомотопические группы.

Пусть теперь X — топологическое пространство, $A \subset X$ — подпространство, и $b \in A$. Относительным n-сфероидом называется непрерывное отображение $f : [0,1]^n \to X$ такое, что $f(t_1, \dots, t_{n-1}, 1) \in A$, и $f(t) = b$ для любой точки $(t_1, \dots, t_n) \in \partial[0,1]^n$ границы куба, для которой $t_n \neq 1$. Символом $\pi_n(X, A, b)$ называется класс гомотопии относительных n-сфероидов. В множестве $\pi_n(X, A, b)$ при $n \geq 2$ вводится операция аналогично случаю $\pi_n(X, b)$



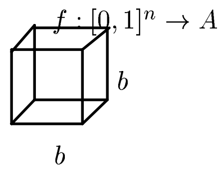
Пусть $j : A \to X$ — тавтологическое вложение (сопоставляющее каждой точке $a \in A$ ее же, но уже как точку $a \in X$). Тогда определен гомоморфизм $\iota_n \overset{\text{def}}{=} j_* : \pi_n(A, b) \to \pi_n(X, b)$. Каждый абсолютный n-сфероид f в пространстве X является также относительным сфероидом пары X, A — это соответствие определяет гомоморфизм $p_n : \pi_n(X, b) \to \pi_n(X, A, b)$. Ограничение относительного n-сфероида $f : [0,1]^n \to X$ пары X, A на границу $\partial[0,1]^n \cong S^{n-1}$ дает абсолютный $(n-1)$-сфероид в A — таким образом определен гомоморфизм групп $\delta_n : \pi_n(X, A, b) \to \pi_{n-1}(A, b)$.

Теорема 1. *Последовательность групп и гомоморфизмов*

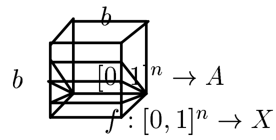
$$\dots \xrightarrow{\delta_{n+1}} \pi_n(A, b) \xrightarrow{\iota_n} \pi_n(X, b) \xrightarrow{p_n} \pi_n(X, A, b) \xrightarrow{\delta_n} \pi_{n-1}(A, b) \xrightarrow{\iota_{n-1}} \dots$$

точная.

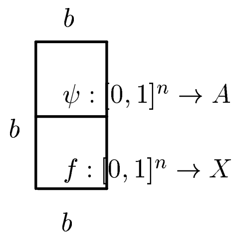
Доказательство. Символом t будем обозначать совокупность $(t_1, \dots, t_n) \in [0,1]^n$.
Точность в члене $\pi_n(A, b)$: пусть $\iota_n([f]) = 0$, где $f : [0,1]^n \to A$ — сфероид. Это означает, что существует гомотопия $\Phi : [0,1]^{n+1} \to X$ такая, что $\Phi(t, 1) = f(t)$, $\Phi(t, 0) = b$ и $\Phi(t, s) = b$, если $t \in \partial[0,1]^n$. Но тогда Φ — относительный $(n+1)$-сфероид пары X, A, и $\delta_{n+1}([\Phi]) = [f]$. Обратно, если $\Phi : [0,1]^{n+1} \to X$ — относительный сфероид, то его можно рассмотреть как гомотопию в X, соединяющую сфероид $\Phi|_{t_{n+1}=1} : [0,1]^n \to A$ с тождественныи сфероидом.



Точность в члене $\pi_n(X, b)$: пусть $p_n([f]) = 0$, где $f : [0,1]^n \to X$ — сфероид. Это означает, что существует гомотопия $\Phi : [0,1]^n \to X$ такая, что $\Phi(t, 1) = f(t)$, $\Phi(t, 0) = b$, $\Phi(t_1, \dots, t_{n-1}, 1, s) \in A$ и $\Phi(t, s) = b$ для всех остальных $t \in \partial[0,1]^n$. Тогда сфероид f гомотопен сфероиду со значениями в A — гомотопия изображена на рисунке ("страницы книги"). Обратное утверждение аналогично.



Точность в члене $\pi_n(X, A, b)$: если $[f] = p_n([g])$, где $g : [0,1]^n \to X$ — сфероид, то $f(t) = b$ при каждом $t \in \partial[0,1]^n$, так что $\delta_n([f]) = 0$. Обратно, пусть $\delta_n([f]) = 0$, где $f : [0,1]^n \to X$ — относительный сфероид. Тогда существует гомотопия $\psi : [0,1]^n \to A$ такая, что $\psi(t_1, \dots, t_{n-1}, 0) = f(t_1, \dots, t_{n-1}, 1)$, и $\psi(t) = b$ для прочих $t \in \partial[0,1]^n$. Объединяя f и ψ как на рисунке, получим гомотопию, соединяющую f со сфероидом в X, переводящим всю границу куба в точку b. $\square$



Пусть теперь $p : E \to B$ — расслоение со слоем F.

Теорема 2 (о накрывающей гомотопии). *Пусть $\gamma : [0,1]^{n+1} = [0,1]^n \times [0,1] \to B$ — непрерывное отображение (гомотопия), и пусть $\Gamma_0 : [0,1]^n \to E$ таково, что $p \circ \Gamma_0 = \gamma_{[0,1]^n \times \{0\}}$. Тогда существует поднятие γ — непрерывное отображение (гомотопия) $\Gamma : [0,1]^n \times [0,1] \to E$ такое, что $p \circ \Gamma = \gamma$ и $\Gamma|_{[0,1] \times \{0\}} = \Gamma_0$.*

Для доказательства нам потребуется

Лемма 1 (Фельдбау). *Расслоение с базой $[0,1]^n$ тривиально.*

Доказательство. Разобьем $[0,1]^n = \Pi_1 \cup \Pi_2 \overset{\text{def}}{=} [0,1]^{n-1} \times [0,1/2] \cup [0,1]^{n-1} \times [1/2,1]$, и пусть сначала известно, что ограничение расслоения на каждый из параллелепипедов тривиально. Обозначим $E_1 = p^{-1}(\Pi_1)$

и $E_2 = p^{-1}(\Pi_2)$; тривиализации: $\lambda_1 : E_1 \to F$ и $\lambda_2 : E_2 \to F$. Теперь для каждого $x \in [0,1]^{n-1}$ возникает гомеоморфизм $\varphi_x : F \to F$, заданный формулой $\varphi_x(u) = \lambda_2((\lambda_1 \times p)^{-1}(u, x \times \{1/2\}))$. Тогда формула $\lambda_2'(x_1, \dots, x_n) = \varphi^{-1}_{(x_1,\dots,x_{n-1})}(\lambda_2(x_1,\dots,x_n))$ определяет тривиализацию $E_2 \to F$, причем $\lambda_2'(y) = \lambda_1(y)$, если $p(y) = (x_1, \dots, x_{n-1}, 1/2)$ (т.е. $y \in E_1 \cap E_2$). Следовательно, определена тривиализация $\lambda : E \to F$, равная λ_1 на E_1 и λ_2' на E_2.

Пусть теперь расслоение $p : E \to [0,1]^n$ произвольно. Разобьем $[0,1]^n$ на маленькие кубики $K_{i_1,\dots,i_n} \stackrel{\text{def}}{=} [i_1/N, (i_1+1)/N] \times \dots \times [i_n/N, (i_n+1)/N]$, $i_1, \dots, i_n = 0, 1, \dots, N-1$, так, чтобы ограничение расслоения на каждый из них было тривиально. Из предыдущего абзаца по индукции вытекает, что тогда ограничение расслоения на "столбик" $\bigcup_{i=1}^N K_{i_1,\dots,i_{n-1},i}$ также тривиально. Отсюда — что ограничение расслоения на двумерный слой $\bigcup_{i,j=1}^N K_{i_1,\dots,i_{n-2},i,j}$ тривиально. Продолжая этот процесс (индукция по размерности), получим утверждение леммы. □

Доказательство теоремы о накрывающей гомотопии. Пусть расслоение E тривиально и $\lambda : E \to F$ — тривиализация. Тогда для произвольных $x \in [0,1]^n$, $t \in [0,1]$ положим $\Gamma(x,t) = (p \times \lambda)^{-1}(\gamma(x,t), \lambda(\Gamma_0(x)))$. Тем самым для тривиального расслоения теорема доказана.

Пусть теперь расслоение E произвольно. Рассмотрим множество $E' \subset E \times [0,1]^{n+1}$, состоящее из пар (e,y), для которых $p(e) = \gamma(y)$, и определим отображение $p' : E' \to [0,1]^{n+1}$ как проекцию $p'(e,y) \stackrel{\text{def}}{=} y$. Нетрудно проверить, что p' является расслоением со слоем F (это верно для любого отображения $\gamma : X \to B$, называется индуцированным расслоением и обозначается в общем случае $\gamma^* p : \gamma^* E \to X$). Согласно лемме Фельдбау, расслоение p' тривиально. Теорема о накрывающей гомотопии теперь сводится к случаю тривиального расслоения и тождественной гомотопии. □

Следствие 1. *Пусть $p : E \to B$ — расслоение со слоем $F = p^{-1}(b)$, где $b \in B$ — отмеченная точка. Тогда отображение $p_* : \pi_n(E, F, x) \to \pi_n(B, b)$, где $x \in F$ — произвольная точка, переводящее класс гомотопии сфероида $f : [0,1]^n \to E$, $f(\partial[0,1]^n) \subset F$, в класс гомотопии сфероида $p \circ f : [0,1]^n \to B$, $(p \circ f)(\partial[0,1]^n) = b$, является изоморфизмом групп.*

Доказательство. Очевидно, p_* — гомоморфизм. Мономорфность: пусть $p \circ f : [0,1]^n \to B$ стягиваем, т.е. существует гомотопия $\gamma : [0,1]^n \times [0,1] \to B$ такая, что $\gamma|_{[0,1]^n \times \{0\}} = p \circ f$, а $\gamma|_{[0,1]^n \times \{1\}} = \{b\}$. Тогда, согласно теореме, существует гомотопия $\Gamma : [0,1]^n \times [0,1] \to E$ такая, что $p \circ \Gamma = \gamma$ и $\Gamma|_{[0,1]^n \times \{0\}} = f$. Тогда $\Gamma|_{[0,1]^n \times \{1\}} \subset F$, что и означает, что f представляет единичный элемент $\pi_n(E,F)$.

Эпиморфность: пусть $g : [0,1]^n \to B$ — сфероид; представим его как гомотопию $[0,1]^{n-1} \times [0,1] \to B$. Поднятие этой гомотопии представляет собой сфероид $G : [0,1]^n \to E$ такой, что $G(\partial[0,1]^n) \subset F$. Тогда $p_*([G]) = [g]$. □

Тем самым точная гомотопическая последовательность пары (E,F) превращается в точную гомотопическую последовательность расслоения

$$\dots \xrightarrow{\delta_{n+1}} \pi_n(F,x) \xrightarrow{\iota_n} \pi_n(E,x) \xrightarrow{p_n} \pi_n(B,b) \xrightarrow{\delta_n} \pi_{n-1}(F,x) \xrightarrow{\iota_{n-1}} \dots;$$

здесь $b \in B$ — отмеченная точка, $F = p^{-1}(b)$ — слой расслоения, и $x \in F \subset E$ — отмеченная точка.

Пример 1. Пусть $S^3 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$ — трехмерная сфера, а $\mathbb{C}P^1$ — комплексная проективная прямая. Отображение $p : S^3 \to \mathbb{C}P^1$, заданное формулой $p(z,w) = [z : w]$, называется расслоением Хопфа. Как нетрудно проверить, это действительно расслоение со слоем S^1.

Точная гомотопическая последовательность в членах π_n, $n \geq 3$, выглядит так: $0 = \pi_n(S^1) \to \pi_n(S^3) \to \pi_n(S^2) \to 0 = \pi_{n-1}(S^1)$. Отсюда вытекает, что $\pi_n(S^3)$ и $\pi_n(S^2)$ изоморфны при всех $n \geq 3$; в частности, $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$. Анализируя конструкцию точной последовательности, легко видеть, что образующей группы $\pi_3(S^2)$ служит класс гомотопии расслоения Хопфа.

"Хвост" последовательности выглядит так: $0 = \pi_2(S^3) \to \pi_2(S^2) \to \pi_1(S^1) \to 0 = \pi_1(S^3)$. Отсюда вытекает равенство $\pi_2(S^2) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, которое, впрочем, нам уже известно.