ЛЕКЦИЯ 9

Краткое содержание. Клеточные разбиения. Теорема о клеточной аппроксимации.

Клеточным пространством называется множество X и набор $\{(e_\alpha^{(k)}, \chi_\alpha^{(k)}) \mid k = 0, 1, \ldots, \alpha \in I_k\}$, где I_k — произвольное множество индексов, $e_\alpha^{(k)} \subset X$, а $\chi_\alpha^{(k)} : B_k \to X$ — отображение k-мерного замкнутого шара в X. Множества $e_\alpha^{(k)}$ называются клетками, число k — размерностью клетки $e_\alpha^{(k)}$, а отображение $\chi_\alpha^{(k)}$ называется характеристическим отображением клетки $e_\alpha^{(k)}$. При этом требуется, чтобы набор обладал следующими свойствами:

1) Множества $e_\alpha^{(k)}$ попарно не пересекаются и образуют разбиение множества X: $X = \bigsqcup_{k=0}^{\infty} \bigsqcup_{\alpha \in I_k} e_\alpha^{(k)}$.
2) Ограничение $\chi_\alpha^{(k)}$ на внутренность $\operatorname{int} B_k$ шара — взаимно однозначное отображение $\operatorname{int} B_k \to e_\alpha^{(k)}$, а образ границы ∂B_k шара лежит в объединении конечного множества клеток $e_\beta^{(l)}$ размерности $l < k$: $\chi_\alpha^{(k)})(\partial B_k) \subset e_{\beta_1}^{(l_1)} \cup \ldots e_{\beta_N}^{(l_N)}$; $l_1, \ldots, l_N < k$.

Множество индексов I_k может быть конечным, бесконечным (любой мощности) или пустым — не обязательно имеются клетки всех размерностей. Объединение $\operatorname{sk}_n(X) = \bigcup_{k \le n} e_\alpha^{(k)}$ называется n-остовом множества X. Клеточным подпространством X называется подмножество $Y = \bigsqcup_k \bigcup_{\alpha \in J_k} e_\alpha^{(k)} \subset X$ (для некоторого набора подмножеств $J_k \subset I_k$), такое что клетки $e_\alpha^{(k)}$, $\alpha \in J_k$, образуют его клеточное разбиение.

Структура клеточного пространства позволяет ввести в X топологию: множество $A \subset X$ считается замкнутым, если его прообраз $(\chi_\alpha^{(k)})^{-1}(A) \subset B_k$ замкнут при любых k и $\alpha \in I_k$. Нетрудно проверить, что это действительно топология, относительно которой все характеристические отображения непрерывны. Клеточным разбиением топологического пространства Y называется его гомеоморфизм с клеточным пространством.

Клеточные пространства образуют категорию, морфизмами в которой являются клеточные отображения: отображение $f : X_1 \to X_2$ называется клеточным, если $f(\operatorname{sk}_n(X_1) \subset \operatorname{sk}_n(X_2)$ и отображение f непрерывно относительно клеточной топологии в X_1 и X_2. Тем самым имеется функтор из категории клеточных пространств в категорию топологических пространств.

Пример 1. Клеточное разбиение сферы $S^n = e_1^{(0)} \sqcup e_2^{(n)}$. Нульмерная клетка $e_1^{(0)}$ — точка (как и любая нульмерная клетка); пусть это $b = (0, 0, \ldots, 1)$. Тогда $e_2^{(n)} = S^n \setminus \{b\}$; характеристическое отображение $\chi_2 : B_n \to e_2^{(n)}$ действует по формуле $\chi_2(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 \sin \pi\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}, \ldots, x_n \sin \pi\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}, \cos \pi\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2})$.

Клеточное разбиение шара B_n: внутренность — n-мерная клетка, граница $\partial B_n = S^{n-1}$ разбивается на 2 клетки, как указано выше.

Пример 2. Склеивание классических поверхностей (сферы с ручками, проективной плоскости, бутылки Клейна и т.п.) из многоугольников автоматически задает на них клеточное разбиение.

Пример 3. Клеточное разбиение $\mathbb{R}$: нульмерные клетки — точки с целыми координатами, одномерные — интервалы с концами в этих точках. Перемножая эти клетки n раз, получим клеточное разбиение $\mathbb{R}^n$.

Подчеркнем, что хотя $\mathbb{R}$ гомеоморфно внутренности одномерного диска, это не является клеточным разбиением из одной одномерной клетки (характеристическое отображение одномерной клетки должно быть определено на отрезке). Вообще, верно такое утверждение (см. пункт 2):

Теорема 1. *1) Клеточное пространство связно тогда и только тогда, когда оно линейно связно и тогда и только тогда, когда линейно связен его 1-остов.*

2) Клеточное пространство компактно тогда и только тогда, когда оно состоит из конечного количества клеток.

Доказательство — упражнение.

Пример 4. Другое клеточное разбиение сферы S^n: в каждой размерности k, $0 \le k \le n$, имеется две клетки, $e_+^{(k)} = \{(x_0, \ldots, x_n) \in S^n \mid x_k > 0, x_{k+1} = \cdots = x_n = 0\}$ и $e_- = \{(x_0, \ldots, x_n) \in S^n \mid x_k < 0, x_{k+1} = \cdots = x_n = 0\}$. Характеристические отображения $\chi_+^{(k)}(y_1, \ldots, y_k) = (y_1, \ldots, y_k, \sqrt{1 - (y_1^2 + \cdots + y_k^2)})$ и $\chi_-^{(k)}(y_1, \ldots, y_k) = (-y_1, \ldots, -y_k, -\sqrt{1 - (y_1^2 + \cdots + y_k^2)})$ соответственно.

Пример 5. Клеточное разбиение $\mathbb{R}P^n$: рассмотрим стандартное накрытие $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$. Тогда в обозначениях примера 4 $p(e_+^{(k)}) = p(e_-^{(k)}) \overset{\text{def}}{=} e_k$ и $p \circ \chi_+^{(k)} = p \circ \chi_-^{(k)} \overset{\text{def}}{=} \chi^{(k)}$. Получается клеточное разбиение $\mathbb{R}P^n$, имеющее в каждой размерности $0 \le k \le n$ единственную клетку $e^{(k)}$ с характеристическим отображением $\chi^{(k)}$.

Пример 6. Бесконечная сфера S^∞ состоит из последовательностей $(x_1, x_2, \dots)$, таких что в каждой последовательности все члены, кроме конечного числа, равны нулю (количество ненулевых членов в каждой последовательности свое), и $\sum_{i=1}^\infty x_i^2 = 1$. Клеточное разбиение S^∞ имеет в каждой размерности по две клетки $e_+^{(k)} = \{(x_0, x_1, \dots) \in S^n \mid x_k > 0, x_{k+1} = x_{k+2} = \dots 0\}$ и $e_+^{(k)} = \{(x_0, x_1, \dots) \in S^n \mid x_k < 0, x_{k+1} = x_{k+2} = \dots 0\}$. Очевидно, $\mathrm{sk}_n(S^\infty) = S^n$ с клеточным разбиением примера 4.

Пример 7. Замыкание клетки может не быть клеточным подпространством. Так, рассмотрим букет $S^1 \vee S^2$ с клеточным разбиением: $e^{(0)} \subset S^1$ — одноточечное подмножество, отличное от вершины букета, $e^{(1)} = S^1 \setminus e^{(0)}$, $e^{(2)} = S^2 \setminus S^1$. Тогда замыкание $e^{(2)}$ (это S^2) содержит точку из $e^{(1)}$ (вершину букета), но не содержит $e^{(1)}$ целиком.

Теорема 2 (о клеточной аппроксимации)**.** *Пусть $f_0 : X \to Y$ — непрерывное отображение клеточных пространств, $Z \subset X$ — клеточное подпространство, и ограничение $f_0|_Z$ клеточное. Тогда существует гомотопия $f_t : X \to Y$, $0 \le t \le 1$ такая, что отображение $f_1 : X \to Y$ клеточное и $f_t|_Z$ не зависит от t.*

Следствие 1. *Для линейно связного клеточного пространства X и всякого $n = 1, 2, \dots$ выполнено равенство $\pi_n(X) = \pi_n(\mathrm{sk}_{n+1}(X))$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что отмеченная точка в X являтся нульмерной клеткой. У S^n имеется клеточное разбиение, содержащее одну нульмерную клетку (отмеченную точку) и одну n-мерную (все остальное). По теореме о клеточной аппроксимации любой сфероид $f : S^n \to X$ гомотопен сфероиду $g : S^n \to \mathrm{sk}_n(X)$, причем гомотопия неподвижна на нульмерной клетке (отмеченной точке). Пусть теперь $F_0 : S^n \times [0,1] \to X$ — гомотопия сфероидов, причем $F_0(S^n \times \{0,1\}) \subset \mathrm{sk}_n(X)$, и ограничение $F_0|_{S^n \times \{0,1\}}$ клеточно. У цилиндра $S^n \times [0,1]$ имеется клеточное разбиение, состоящее из нульмерных клеток $e^{(0)} \times \{0\}$ и $e^{(0)} \times \{1\}$, одномерной клетки $e^{(0)} \times (0,1)$, n-мерных клеток $e^{(n)} \times \{0\}$ и $e^{(n)} \times \{1\}$ и $(n+1)$-мерной клетки $e^{(n)} \times (0,1)$. Согласно теореме о клеточной аппроксимации гомотопия F_0 гомотопна гомотопии $F_1 : S^n \times [0,1] \to \mathrm{sk}_{n+1}(X)$, причем $F_1(x,0) = F_0(x,0)$ и $F_1(x,1) = F_0(x,1)$ для всех $x \in S^n$ при гомотопии остаются на месте. $\square$

Пусть теперь X — клеточное пространство с единственной нульмерной клеткой $e^{(0)}$. Тогда $\mathrm{sk}_1(X)$ это букет окружностей с вершиной $e^{(0)}$, и $\pi_1(\mathrm{sk}_1(X)) = \mathcal{F}(\{e_\alpha^{(1)} \mid \alpha \in I_1\})$. Для произвольной двумерной клетки $e_\beta^{(2)}$ ограничение характеристического отображения $\chi_\beta^{(2)}$ на границу $\partial B_2 = S^1$ задает элемент $u_\beta \in \pi_1(\mathrm{sk}_1(X))$ с точностью до сопряженности (поскольку в ∂B_2 нет отмеченной точки).

Теорема 3. *Фундаментальная группа клеточного пространства X с единственной нульмерной клеткой изоморфна фактор-группе группы $\pi_1(\mathrm{sk}_1(X))$ по нормальной подгруппе, порожденной всеми элементами u_β (иными словами, группа $\pi_1(X)$ порождена образующими $\chi_\alpha^{(1)}$, $\alpha \in I_1$ и соотношениями $u_\beta = 1$, $\beta \in I_2$).*

Доказательство. Как мы уже видели в доказательстве следствия 1, всякая петля $\gamma_0 : [0,1] \to X$ гомотопна петле $\gamma_1 : [0,1] \to \mathrm{sk}_1(X)$. Тем самым гомоморфизм $\iota_* : \pi_1(\mathrm{sk}_1(X)) \to \pi_1(X)$ (где $\iota : \mathrm{sk}_1(X) \to X$ — вложение) является эпиморфизмом, и множество элементов $\chi_\alpha^{(1)}$ действительно порождает $\pi_1(X)$.

Отображение $\chi_\beta^{(2)}\Big|_{\partial B_2}$ продолжается до отображения $\chi_\beta^{(2)} : B_2 \to X$ и, следовательно, гомотопно отображению в точку. Тем самым все элементы u_β принадлежат ядру гомоморфизма ι_*.

Обратно, пусть $u \in \operatorname{Ker} \iota_*$, и пусть $\gamma : [0,1] \to \mathrm{sk}_1(X)$ — петля, представляющая класс u. По теореме о клеточной аппроксимации петля γ стягивается в $\mathrm{sk}_2(X)$, т.е. существует отображение $\Gamma : B_2 \to \mathrm{sk}_2(X)$, совпадающее с γ на границе круга. Отождествим каждую клетку $e_\beta^{(2)}$ с открытым кругом Ω_β с помощью характеристического отображения. Триангулируем круг B_2 достаточно мелко; тогда можно построить гомотопию, постоянную близ границы Ω_β, а на круге $\Omega'_\beta \subset \Omega_\beta$ достаточно малого радиуса соединяющую отображение Γ с кусочно-линейным отображением Γ', совпадающем с Γ в вершинах треугольников триангуляции (поскольку мы отождествили $e_\beta^{(2)}$ с $\Omega_\beta \subset \mathbb{R}^2$, гомотопию можно сделать линейной: $t\Gamma' + (1-t)\Gamma$, где $t = 0$ вблизи границы круга Ω_β и $t = 1$ внутри Ω'_β). Поскольку $\Gamma(\partial B_2) \subset \mathrm{sk}_1(X)$, достаточно малая окрестность множества ∂B_2 переводится отображением Γ в объединение малых окрестностей границ Ω_β. Тем самым значения Γ на ∂B_2 при гомотопии не меняются, и полученное после гомотопии отображение — назовем его опять Γ — по-прежнему совпадает с γ на границе круга.

Прообраз $\Gamma^{-1}(\Omega''_\beta) \subset B_2$ — область, ограниченная эллипсом. Растянем теперь круг Ω'_β на все Ω_β; композиция этого растяжения и отображения Γ по-прежнему совпадает с γ на границе круга. Теперь для круга малого радиуса $\Omega''_\beta \subset \Omega_\beta$. Тем самым получилось отображение (назовем его опять Γ) переводит весь B_2, кроме объединения непересекающихся эллиптических областей $E_1, \dots, E_N$, в $\mathrm{sk}_1(X)$, на границе круга совпадает с γ, а на границе этих областей совпадает с $\chi_\beta^{(2)}$. Соединим отмеченную точку $b \in \partial B_2$ системой непересекающихся путей $s_1 \dots, s_N$ с границами областей, получим, что γ гомотопна (как петля в $\mathrm{sk}_1(X)$) произведению петель вида $\Gamma \circ s_\beta \chi_\beta^{(2)} s_\beta^{-1}$, классы гомотопии которых принадлежат нормальной подгруппе, порожденной всеми u_β. □

Пример 8. Из клеточных разбиений примеров 1–5 и теоремы 3 вытекает, что $\pi_1(S^n)$ тривиальна при $n > 1$ и равна $\mathbb{Z}$ при $n = 1$, $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (эти факты были доказаны ранее), а также что фундаментальная группы сферы с g ручками порождена $2g$ образующими $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ с единственным соотношением $[a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] = 1$, где $[x, y] \stackrel{\mathrm{def}}{=} xyx^{-1}y^{-1}$ (этот факт новый). Фундаментальная группа бутылки Клейна порождена двумя образующими a, b и соотношением $abab^{-1} = 1$.

Для доказательства теоремы о клеточной аппроксимации нам потребуется вспомогательное утверждение:

Лемма 1 (лемма Борсука)**.** *Пусть X — клеточное пространство, Y — произвольное топологическое пространство, $Z \subset X$ — клеточное подпространство. Пусть задана гомотопия $\Phi : Z \times [0,1] \to Y$ и отображение $\Psi_0 : X \to Y$ такое, что $\Psi(z) = \Phi(z, 0)$ для любого $z \in Z$. Тогда существует гомотопия $\Psi : X \times [0,1] \to Y$ такая, что $\Psi(x, 0) = \Psi_0(x)$ при всех $x \in X$ и $\Phi(z, t) = \Psi(z, t)$ для всех $z \in Z$, $t \in [0,1]$.*

Доказательство. Зафиксируем клетку $e_\alpha^{(k)}$ пространства X и предположим, что гомотопия Ψ уже задана на всех клетках подпространства Z и на всех клетках $e_\beta^{(l)}$ пространства X размерности $l < k$. Тем самым $\Psi(x, t)$ определена при $x \in \partial e_\alpha^{(k)}$ и при всех x и $t = 0$. Отождествляя $e_\alpha^{(k)}$ с $\mathrm{int}\, B_k$, получим задачу продолжения отображения Ψ на $B_k \times [0,1]$ при условии, что оно задано на $C_k \stackrel{\mathrm{def}}{=} \partial B_k \times [0,1] \cup B_k \times \{0\}$.

Существует непрерывное отображение (ретракция) $f : B_k \times [0,1] \to C_k$ такое, что $f(s) = s$ при всех $s \in C_k \subset B_k$ (например, можно вложить $B_k \times [0,1] \subset \mathbb{R}^{k+1}$ и взять в качестве f проекцию из точки $(a, 1+\varepsilon)$, где a — центр круга, а $\varepsilon > 0$ произвольно. Отображение $\Psi(b, t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Psi(f(b, t))$ $(f(b,t) \in U_k$, поэтому правая часть определена) является искомым продолжением.

Тем самым существует продолжение гомотопии Ψ в произвольную клетку, если во все клетки меньшей размерности гомотопия уже продолжена. При этом продолжение можно делать одновременно для всех клеток данной размерности. Таким образом получим для каждого n непрерывное отображение $\Psi_n : \mathrm{sk}_n(X) \times [0,1] \to Y$, продолжающее гомотопию Φ и отображение Ψ_0, причем эти продолжения согласованы: $\Psi_n|_{\mathrm{sk}_{n-1}(X)\times[0,1]} = \Psi_{n-1}$. Это дает отображение $\Psi : X \times [0,1] \to Y$, непрерывность которого вытекает из определения клеточной топологии (непрерывность на каждом остове влечет непрерывность на всем пространстве). □

Доказательство теоремы о клеточной аппроксимации. Рассмотри клетку $e_\alpha^{(k)}$ в X и предположим, что отображение f уже клеточное на Z и на всех клетках размерности меньше k. Поскольку множество $\overline{e_\alpha^{(k)}}$ пересекается с конечным числом клеток, оно компактно; тогда образ $f(\overline{e_\alpha^{(k)}})$ также компактен, откуда вытекает, что $f(e_\alpha^{(k)})$ пересекается с конечным числом клеток в Y.

Пусть $e_\beta^{(l)} \cap f(e_\alpha^{(k)}) \neq \varnothing$ и $l > k$ (если таких клеток нет, то отображение f уже клеточно на клетке $e_\alpha^{(k)}$). Тогда стандартной гомотопией, не меняющей $f(x)$ для тех точек $x \in e_\alpha^{(k)}$, для которых $f(x) \notin e_\beta^{(l)}$, можно добиться чтобы $e_\beta^{(l)} \not\subset f(e_\alpha^{(k)})$. Тогда проекцией из точки $y \in e_\beta^{(l)} \setminus f(e_\alpha^{(k)})$ можно построить отображение f', гомотопное f и такое, что образ $f'(e_\alpha^{(k)})$ пересекается с теми же клетками размерности, большей k, что и $f(e_\alpha^{(k)})$, за исключением $e_\beta^{(l)}$. Повторяя эту процедуру конечное количество раз, построим отображение, гомотопное f и такое, что образ e_α лежит в $\mathrm{sk}_k(Y)$. Эту гомотопию можно проделать для всех клеток размерности k одновременно и продолжить затем на все пространство X по лемме Борсука.

Таким образом, если f клеточное на $\mathrm{sk}_{k-1}(X)$, то его можно сделать клеточным на $\mathrm{sk}_k(X)$, подвергнув гомотопии, неподвижной на Z и на $\mathrm{sk}_{k-1}(X)$. Рассуждая аналогично лемме Борсука, получим, что тем самым построена гомотопия f и отображения, клеточного на всем X. □