1. ГОМЕОМОРФИЗМ

Задача 1. Докажите, что следующие пространства гомеоморфны: а) прямое произведение $S^1 \times \cdots \times S^1$ (n сомножителей); б) куб $[0,1]^n$, в котором точки граней склеены по правилу $(x_1,\dots,x_i,0,x_{i+2},\dots,x_n) \sim (x_1,\dots,x_i,1,x_{i+2},\dots,x_n)$ для всех i и всех $x_1,\dots,x_i,x_{i+2},\dots,x_n$; в) пространство орбит действия группы $\mathbb{Z}^n$ на $\mathbb{R}^n$: вектору $k=(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{Z}^n$ соответствует параллельный перенос $T_k(x_1,\dots,x_n)=(x_1+k_1,\dots,x_n+k_n)$.

Джойном топологических пространств X и Y (обозначение $X*Y$) называется фактор прямого произведения $X\times[0,1]\times Y$ по отношению $(x,0,y_1)\sim(x,0,y_2)$ и $(x_1,1,y)\sim(x_2,1,y)$ для всех $x,x_1,x_2\in X$ и всех $y,y_1,y_2\in Y$. Джойн $X*\{\mathrm{pt}\}$, где $\{\mathrm{pt}\}$ — пространство из одной точки, называется конусом над X и обозначается CX. Джойн $X*S^0$, где S^0 — пространство из двух точек (с дискретной топологией), называется надстройкой над X и обозначается ΣX.

Задача 2. Докажите, что а) конус над сферой S^n гомеоморфен диску B^{n+1}; б) надстройка над сферой S^n гомеоморфна сфере S^{n+1}.

Задача 3. Докажите, что а) S^1*S^1 гомеоморфно S^3; б) S^n*S^k гомеоморфно S^{n+k+1}.

Задача 4. а) Докажите, что каждое из множеств $A=\{(z,w)\in\mathbb{C}^2 : |z|^2+|w|^2=1,\ |z|\le|w|\}$ и $B=\{(z,w)\in\mathbb{C}^2 : |z|^2+|w|^2=1,\ |z|\ge|w|\}$ гомеоморфно полноторию, то есть произведению $S^1\times B^2$ (окружности на круг). б) Чему гомеоморфно пересечение $A\cap B$ и объединение $A\cup B$? в) Докажите, что дополнение в $\mathbb{R}^3$ к стандартно вложенному полноторию (бублику) гомеоморфно полноторию без одной точки.

Задача 5. а) Докажите, что $\mathbb{R}P^1$ (множество прямых на плоскости, проходящих через начало координат) гомеоморфно окружности. б) Докажите, что $\mathbb{C}P^1$ (множество комплексных прямых в $\mathbb{C}^2$, проходящих через начало координат) гомеоморфно двумерной сфере. в) Докажите, что множество прямых на плоскости (не обязательно проходящих через начало координат) гомеоморфно ленте Мебиуса без границы. Куда переходит при гомеоморфизме множество прямых, проходящих через начало координат? через произвольную фиксированную точку плоскости? множество прямых, параллельных оси абсцисс? множество прямых, пересекающих единичный круг с центром в начале координат? г) Докажите, что множество проективных прямых на проективной плоскости гомеоморфно проективной плоскости. Куда переходит при этом гомеоморфизме множество прямых, проходящих через заданную точку? множество прямых, касающихся заданной окружности?

Задача 6. а) На пространстве $\mathbb{R}^2$ действует группа из двух элементов $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}=\{1,-1\}$: преобразование, соответствующее элементу -1, меняет местами координаты. Докажите, что пространство орбит этого действия гомеоморфно полуплоскости с границей. б) Тот же вопрос для действия, в котором -1 меняет знак у обеих координат. в) Рассмотрим действие группы $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, аналогичное пункту 6а, но на пространстве $\mathbb{C}^2$. Докажите, что пространство орбит гомеоморфно $\mathbb{C}^2$. г) Рассмотрим действие группы $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, аналогичное пункту 6б, но на пространстве $\mathbb{C}^2$. Опишите пространство орбит. д) (обобщение пункта 6в) На $\mathbb{C}^n$ действует перестановками координат группа перестановок Σ_n. Докажите, что пространство орбит гомеоморфно $\mathbb{C}^n$.

Задача 7. а) На двумерном торе $S^1\times S^1$ действует группа из двух элементов $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}=\{1,-1\}$ аналогично задаче 6а. Докажите, что пространство орбит действия гомеоморфно ленте Мебиуса. б) На пространстве $(S^2)^n$ действует перестановками сомножителей группа перестановок Σ_n. Докажите, что пространство орбит гомеоморфно $\mathbb{C}P^n$. в) На пространстве $(\mathbb{T}^2)^n$, где $\mathbb{T}^2=S^1\times S^1$ — двумерный тор, действует перестановками сомножителей группа перестановок Σ_n. Докажите, что пространство орбит гомеоморфно $\mathbb{T}^n\times\mathbb{C}P^n$.

Указание. К пункту 7б: воспользуйтесь результатом задачи 5б.

Задача 8. а) Докажите, что множество $\mathbb{R}G_+(4,2)$ ориентированных двумерных подпространств в $\mathbb{R}^4$ гомеоморфно $S^2\times S^2$. б) Рассмотрим отображение $f:\mathbb{R}G_+(4,2)\to\mathbb{R}G_+(4,2)$, меняющее ориентацию плоскости. Какому отображению $S^2\times S^2$ в себя оно соответствует при построенном в пункте 8а гомеоморфизме?