2. ОТОБРАЖЕНИЯ ОКРУЖНОСТИ В ОКРУЖНОСТЬ.

Задача 1. Найдите степень отображения из $f : S^1 \to S^1$, где $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, заданного формулой $f(x,y) = A(x,y)/|A(x,y)|$ при а) $A(x,y) = (x,-y)$, б) $A(x,y) = (y,x)$, в) $A(x,y) = (x^2-y^2, 2xy)$, г) $A(x,y) = (\mathrm{Re}((x+iy)^n), \mathrm{Im}((x+iy)^n))$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 2. Пусть $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ — многочлен с комплексными коэффициентами. Определим отображение $f_R : S^1 \to S^1$ формулой $f_R(x,y) = P(R(x+iy))/|P(R(x+iy))|$; здесь $R > 0$ — вещественное число. а) Докажите, что если R достаточно велико, то отображение f_R определено и существует семейство отображений $g_t : S^1 \to S^1$, $0 \le t \le 1$, непрерывно зависящее от t и такое, что $g_0 = f_R$, а g_1 — отображение из задачи 1г (как говорят, f_R и отображение задачи 1г гомотопны). б) Получите из результатов задач 2а и 1г основную теорему алгебры: существует $z \in \mathbb{C}$ такое, что $P(z) = 0$.

Указание. Если основная теорема алгебры неверна для многочлена P, то отображение f_R определено для любого R; рассмотрите его для $R = 0$.

Задача 3. Отображение $E : \mathbb{R} \to S^1$ задается формулой $E(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. а) Пусть $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ — непрерывное отображение, для которого $f(0) = 0$, $f(1) = n \in \mathbb{Z}$. Докажите, что существует и единственно непрерывное отображение $g : S^1 \to S^1$ такое, что $g \circ E = E \circ f$. б) Докажите, что степень отображения g из задачи 3а равна n. в) Пусть $g : S^1 \to S^1$ — непрерывное отображение, для которого $g(1,0) = (1,0)$. Докажите, что существует и единственно непрерывное отображение $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ такое, что $g \circ E = E \circ f$ и $f(0) = 0$. г) Докажите, что $f(1) = \deg g$, где f — отображение из задачи 3в. д) Докажите, что отображения $g_0 : S^1 \to S^1$ и $g_1 : S^1 \to S^1$ гомотопны тогда и только тогда, когда имеют одинаковые степени.

Указание (к задаче 3в). Поставьте на окружности точки $a_1, \dots, a_N$, как в определении индекса.

Векторным полем на двумерной сфере $S^2 = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ называется семейство векторов $V(x,y,z)$, непрерывно зависящих от точки $(x,y,z) \in S^2$, таких что вектор $V(x,y,z)$ касается сферы в точке (x,y,z) (то есть перпендикулярен радиус-вектору (x,y,z)).

Пусть на сфере задано векторное поле V, не равное нулю ни в одной точке. Определим семейство отображений $g_t : S^1 \to S^1, -1 \le t < 1$ так: для любой точки $(x,y) \in S^1$ проведем через точку $(x\sqrt{1-t^2}, y\sqrt{1-t^2}, t) \in S^2$ прямую в направлении вектора $V(x\sqrt{1-t^2}, y\sqrt{1-t^2}, t)$. Затем спроектируем прямую на плоскость $\mathbb{R}^2 = \{(u,v,0) \mid u,v \in \mathbb{R}\}$ из точки $(0,0,1) \in S^2$. Тогда $g_t(x,y)$ это вектор единичной длины в направлении проекции (проверьте, что проекция указанной прямой не может быть точкой, так что это правило имеет смысл!).

Задача 4. а) Пусть $V(0,0,-1) \neq 0$. Докажите, что степень отображения g_{-1} равна 0. б) Пусть $V(0,0,1) \neq 0$. Отложим в каждой точке a плоскости, касательной к S^2 в точке $(0,0,1)$, вектор $\tilde{W}(a)$, равный $V(0,0,1)$. Пусть теперь $p(a) = (x,y,z)$ — проекция точки a на сферу (пересечение сферы и луча, проведенного через центр сферы и a); ортогонально спроектируем вектор $\tilde{W}(a)$ на плоскость, касательную к сфере в точке $p(a)$ — получится вектор $W(x,y,z)$. Докажите, что полученный вектор $W(x,y,z)$ и вектор $V(x,y,z)$ не направлены в противоположные стороны, если z достаточно близко к 1 (а x и y, соответственно, к 0). в) Пусть $h_t : S^1 \to S^1$ — отображение, полученное тем же способом, что и g_t, но с использованием векторного поля W вместо V. Докажите, что при t, достаточно близком к 1, степень отображения h_t равна 2. г) Докажите, что степень отображения g_t при t, достаточно близком к 1, равна 2. Выведите отсюда, что предположение в начале этой задачи было ложным: любое векторное поле на сфере S^2 обращается в нуль по крайней мере в одной точке. д) Придумайте пример векторного поля на S^2, обращающегося в нуль ровно в одной точке.