3. СВЯЗНОСТЬ, КОМПАКТНОСТЬ, ГОМОТОПИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

Задача 1. Разбейте заглавные буквы русского алфавита (в стандартном начертании без засечек) на группы гомеоморфных.

Задача 2. Докажите, что подмножество $A \subset \mathbb{R}^2$, составленное из всех точек с координатами $(x, \sin 1/x)$, $x \neq 0$, и всех точек с координатами $(0, y)$, $-1 \leq y \leq 1$, связно, но не является линейно связным.

Задача 3. а) Докажите, что отображение $f : [0,1) \to \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = S^1$, заданное формулой $f(t) = \exp(2\pi i t)$, непрерывно и обратимо, но не является гомеоморфизмом. б) Докажите, что непрерывное обратимое отображение компактных пространств является гомеоморфизмом.

Задача 4. Пространство c состоит из последоовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$ таких, что $|x_n| \leq 1$ для всех n. а) Докажите, что формула $d(x,y) = \sup_n |x_n - y_n|$ определяет на c метрику. б) Докажите, что в этой метрике пространство c некомпактно. в) Докажите, что подмножество $\Pi \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, x_2, \dots) \mid |x_n| \leq 1/2^n \, \forall n\} \subset c$ компактно.

Задача 5. Докажите, что плоскость и полуплоскость (с границей) не гомеоморфны.

Задача 6. Докажите, что цилиндр $S^1 \times [0,1]$ и лента Мебиуса не гомеоморфны. Являются ли они гомотопически эквивалентными?

Задача 7. а) Докажите, что букет k окружностей X_k, $k \geq 2$, гомотопически не эквивалентен окружности. б) Докажите, что букеты окружностей X_k и X_l при $k \neq l$ гомотопически не эквивалентны.

Указание (к пункту 7а)**.** Рассмотрите отображение $f : S^1 \to X_k$, переводящее S^1 гомеоморфно в окружность номер 1 букета, и отображение $g : X_k \to S^1$, переводящее окружность номер k гомеоморфно в S^1, а все остальные окружности отображающее в точку. Тогда f и g не гомотопны отображению в точку (почему?), а $g \circ f : S^1 \to S^1$ — отображение в точку. Докажите, что при замене X_k на S^1 подобной пары отображений не существует.

Сферой с g ручками называется результат попарного отождествления противоположных сторон $4g$-угольника с обращением ориентации ("без перекрутки"). Так, сфера с одной ручкой это тор $S^1 \times S^1$.

Задача 8. а) Докажите, что сфера с g ручками гомеоморфна сфере с $g-1$ ручками и дыркой, к которой приклеена по границе ручка — тор с дыркой. б) Разобьем стороны шестиугольника на пары и каждую пару склеим без перекрутки. Докажите, что каждый раз полученная поверхность гомеоморфна тору $S^1 \times S^1$ и нарисуйте на торе склеенные стороны шестиугольника. в) Та же задача для восьмиугольника — вместо тора получится сфера с двумя ручками. г*) Разобьем стороны $4g$-угольника или $4g+2$-угольника на пары и склеим без перекрутки. Докажите, что полученное топологическое пространство гомеоморфно сфере с g ручками.

Задача 9. а) Докажите, что сфера с g ручками и с выколотой точкой гомотопически эквивалента букету $2g$ окружностей. б) Докажите, что сфера с k ручками не гомеоморфна сфере с l ручками при $k \neq l$.