4. НАКРЫТИЯ И ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА.

Задача 1. Докажите, что категория накрытий над S^1 изоморфна следующей категории: объекты ее — целые числа; если $l|k$, то существует единственный морфизм $k \to l$, а если $l \not| k$, то морфизмов $k \to l$ не существует.

Графом называется результат склеивания конечного или бесконечного множества отрезков по какому-либо отождествлению их концов. Склеенные отрезки называются ребрами графа, а точки, в которые склеились концы, — вершинами. Количество концов ребер, склеенных в данную вершину, называется валентностью вершины.

Задача 2. а) Пусть граф Γ локально конечен, т.е. валентность каждой его вершины конечна. Докажите, что подмножество $X \subset \Gamma$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и лежит в объединении конечного множества ребер. б) Докажите, что граф Γ_a, изображенный на рис. 1a (бесконечное дерево), односвязен. в) Постройте накрытие $p_a : \Gamma_a \to S^1 \vee S^1$ над букетом из двух окружностей. Докажите, используя результат задачи 2б, что $\pi_1(S^1 \vee S^1)$ — свободная группа $\mathcal{F}_2$ с двумя образующими.

Задача 3. а) Постройте накрытия $p_b : \Gamma_b \to S^1 \vee S^1$ и $p_c : \Gamma_c \to S^1 \vee S^1$, где графы Γ_b и Γ_c изображены на рис. 1b и 1c соответственно. б) Вычислите подгруппу $(p_b)_*(\pi_1(\Gamma_b)) \subset \mathcal{F}_2$. Нормальна ли эта подгруппа? Опишите $\pi_1(\Gamma_b)$ как группу. в) Те же вопросы про граф Γ_c.

Задача 4. Пусть $p : E \to B$ — накрытие, причем пространства B и E линейно связны и локально односвязны, и пусть $b \in B$ — отмеченная точка. Докажите, что подгруппа $p_*(\pi_1(E)) \subset \pi_1(B)$ не является нормальной тогда и только тогда, когда существует петля в B с началом в точке b, которая является одновременно образом петли и образом незамкнутого пути в E. Укажите такую петлю для накрытия букета двух окружностей графом, изображенным на рис. 1c.

Задача 5. а) Топологическое пространство Γ является связным n-листным накрытием букета из k окружностей. Докажите, что Γ гомеоморфно конечному графу, и найдите число вершин и ребер этого графа. б) Докажите, что любой связный конечный граф гомотопически эквивалентен букету окружностей. Как связано число окружностей в букете с числом вершин и ребер графа? в) Используя результаты задач 6а и 6б, докажите, что если группа G является подгруппой свободной группы $\mathcal{F}_k$ с k образующими, и индекс $|\mathcal{F}_k : G| = n$ конечен, то G изоморфна свободной группе F_p. Выразите число p через n и k. Продумайте возможность чисто алгебраического доказательства этого утверждения.

Задача 6. а) Постройте двулистное накрытие $p : C \to M$ ленты Мебиуса M цилиндром $C = S^1 \times [0,1]$. Опишите прообраз $p^{-1}(U)$, где U — окрестность средней линии ленты Мебиуса. б) Докажите, что $\pi_1(M) = \pi_1(C) = \mathbb{Z}$, и опишите отображение фундаментальных групп $p_* : \pi_1(C) \to \pi_1(M)$.

Задача 7. а) Постройте двулистное накрытие $p : S^2 \to \mathbb{R}P^2$ и вычислите группу $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$. б) Докажите, что если представить $\mathbb{R}P^2$ как круг, противоположные точки границы которого склеены, то окрестность U граничной окружности этого круга гомеоморфна ленте Мебиуса. в) Докажите, что $p^{-1}(U) \subset S^2$ гомеоморфно цилиндру, а ограничение p на него изоморфно накрытию, описанному в задаче 7.

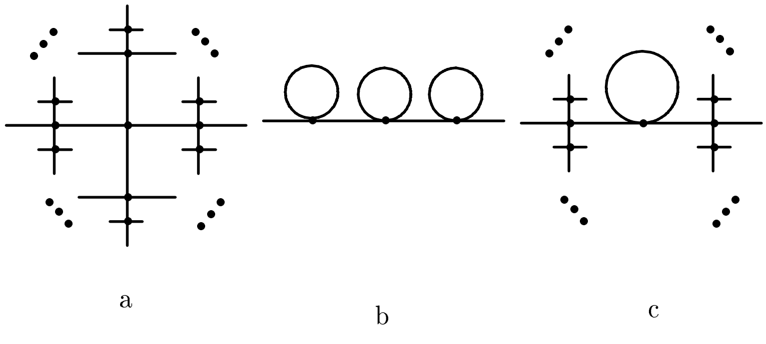

Рис. 1. Накрытия над букетом двух окружностей

Задача 8. а) Постройте двулистное накрытие $p: \mathbb{T}^2 \to K$, где K — бутылка Клейна. б) Докажите, что $\pi_1(K)$ порождена двумя образующими a и b, связанными единственным соотношением $abab^{-1} = 1$. в) Опишите подгруппу (индекса 2) $p_*(\pi_1(\mathbb{T}^2)) \subset \pi_1(K)$.

Монодромией накрытия $p : E \to B$ называется отображение $\mathcal{M}$ группы $\pi_1(B, b)$ ($b \in B$ — отмеченная точка) в группу взаимно однозначных отображений слоя F в себя, заданное следующим образом: пусть $x \in \pi_1(B, b)$ представлен петлей $\gamma : [0, 1] \to B$. Тогда для каждого $y \in p^{-1}(b) = F$ рассмотрим поднятие $\Gamma : [0, 1] \to E$ петли γ такое, что $\Gamma(0) = y$ (Γ существует и единственно по теореме о накрывающей гомотопии). Тогда положим по определению $\mathcal{M}(\gamma)(y) = \Gamma(1)$.

Задача 9. а) Докажите, что $\mathcal{M}(\gamma)$ действительно взаимно однозначное отображение слоя $p^{-1}(b)$ в себя. Докажите также, что оно не зависит от выбора петли γ, представляющей класс x. б) Вычислите монодромию накрытий, описанных в задачах 7, 8 и 9. в) Вычислите монодромию накрытий, построенных в задаче 3.

Обозначим $s_2 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ проекцию на второй сомножитель: $s_2(z, w) \stackrel{\text{def}}{=} w$. Рассмотрим многочлен $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, и пусть $\Gamma_P = \{(z, P(z)) \mid z \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^2$ — его график. Число $c \in \mathbb{C}$ называется регулярным значением P, если $P'(z) \neq 0$ для всех z таких, что $P(z) = c$.

Задача 10. а) Докажите, что если $U \subset \mathbb{C}$ — множество регулярных значений P, то ограничение отображения s_2 на прообраз $V \stackrel{\text{def}}{=} s_2^{-1}(U) \subset \Gamma_P$ — накрытие $V \to U$, число листов которого равно степени P. б) Вычислите монодромию этого накрытия в случае $P(z) = z^n$. в) Тот же вопрос для $P(z) = z^5 - 5z - 1$.