6. ТОЧНАЯ ГОМОТОПИЧЕСКАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ПАРЫ И РАССЛОЕНИЯ.

Задача 1. а) Опишите точную гомотопическую последовательность (то есть укажите все входящие в нее группы и гомоморфизмы) пары (S^1, S^0), где $S^0 \subset S^1$ — пара диаметрально противоположных точек. б) Тот же вопрос для пары $(K, \mathbb{T}^2)$, где K — полноторие, а $\mathbb{T}^2 = \partial K$ — его граница.

Задача 2. Подмножество $B \subset A$ называется ретрактом A, если существует непрерывное отображение $f : A \to B$ такое, что $f(x) = x$ для любого $x \in A$. а) Докажите, что если B — ретракт A, то в точной гомотопической последовательности пары (A, B) отображение $\pi_i(B) \to \pi_i(A)$ — мономорфизм, отображение $\pi_i(A) \to \pi_i(A, B)$ — эпиморфизм, отображение $\pi_i(A, B) \to \pi_{i-1}(B)$ нулевое, и группа $\pi_i(A)$ изоморфна $\pi_i(A, B) \oplus \pi_i(B)$. б) Выведите из результата пункта 2а и равенства $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ теорему Брауэра для $(n+1)$-мерного шара.

Задача 3. Пусть подмножество $B \subset A$ стягиваемо в точку (т.е. существует гомотопия $f_t : B \to A$ такая, что $f_0(x) = x$ при всяком $x \in B$, а $f_1(B)$ — точка). Докажите, что в точной гомотопической последовательности пары (A, B) отображение $\pi_i(A) \to \pi_i(A, B)$ — мономорфизм, отображение $\pi_i(A, B) \to \pi_{i-1}(B)$ — эпиморфизм, отображение $\pi_i(B) \to \pi_i(A)$ нулевое, и группа $\pi_i(A, B)$ изоморфна $\pi_i(A) \oplus \pi_{i-1}(B)$.

Задача 4. Пусть $p : E \to B$ — локально тривиальное расслоение, а $F = p^{-1}(b)$ — слой над отмеченной точкой. Отображение p переводит E в B, а F в b, определяя таким образом гомоморфизм $p_* : \pi_i(E, F, b) \to \pi_i(B, b)$. а) Докажите, используя теорему о накрывающей гомотопии, что p_* — изоморфизм. б) Теперь точная гомотопическая последовательность пары (E, F) принимает вид $\dots \to \pi_i(F) \to \pi_i(E) \to \pi_i(B) \to \pi_{i-1}(F) \to \dots$. Опишите явно отображение $\pi_i(B) \to \pi_{i-1}(F)$.

Задача 5. Вычислите явно точную последовательность (опишите входящие в нее группы и гомоморфизмы) расслоения Хопфа до члена π_3.

Задача 6. Пусть $p : E \to S^2$ — расслоение из задачи 5 листка 5. а) Выпишите его точную гомотопическую последовательность до члена π_3. б) Решите еще раз задачу 5в листка 5 и докажите, что дважды пройденный слой расслоения стягивается в E в точку. в) Пусть $v \in S^2$ — северный полюс. Придумайте отображение $\psi : D \to E$, где D — двумерный круг, такое, что ограничение ψ на внутренность круга является вложением (переводит различные точки в различные) в $E \setminus p^{-1}(v)$, а ограничение ψ на границу круга переводит его в $p^{-1}(v)$ и является двулистным накрытием. г) Докажите, что ψ из пункта 6в можно выбрать так, чтобы для всех $u \neq v$ пересечение $\psi(D) \cap p^{-1}(u)$ состояло из двух точек.

Задача 7. Для произвольного $k \in \mathbb{Z}$ придумайте расслоение с базой S^2 и слоем S^1 такое, что в его точной гомотопической последовательности гомоморфизм $\mathbb{Z} = \pi_2(S^2) \to \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ является умножением на k.

Задача 8. а) Докажите, что проекция бутылки Клейна на ее среднюю линию является расслоением с базой S^1 и слоем S^1. б) Выпишите точную гомотопическую последовательность этого расслоения.

Указание. Описание фундаментальной группы бутылки Клейна см. в задаче 8 листка 4.