7. КЛЕТОЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА.

Задача 1. а) Докажите, что клеточное пространство X связно $\Leftrightarrow$ линейно связно $\Leftrightarrow$ $\mathrm{sk}_1 X$ линейно связен. б) Докажите, что клеточное пространство компактно тогда и только тогда, когда оно состоит из конечного числа клеток.

Во следующих задачах нужно построить клеточное разбиение пространства X и вычислить $\pi_1(X)$. Если даны два пространства и отображение f между ними, то нужно подобрать клеточные разбиения так, чтобы отображение было клеточным, и вычислить гомоморфизм $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$.

Задача 2. а) X — двумерное многообразие: тор $(S^1 \times S^1)$; сфера с g ручками; бутылка Клейна; проективная плоскость; бутылка Клейна и проективная плоскость с g ручками; те же многообразия из которых вырезано n дырок. б) $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. $f : X \to S^1$, $g : S^1 \to X$ — стандартная гомотопическая эквивалентность. в) $X = \mathbb{R}P^n$. $f : S^n \to X$ — стандартное двулистное накрытие. г) $X = \mathbb{C}P^n$. $f : S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ — обобщенное расслоение Хопфа. д) $X = S^\infty$ — множество бесконечных последовательностей $(x_1, \dots, x_n, \dots)$, члены которых равны нулю, начиная с некоторого номера (своего для каждой последовательности), и $\sum_{k=1}^\infty x_k^2 = 1$. $Y = \mathbb{C}P^\infty$ (дайте определение !). $f : S^\infty \to \mathbb{C}P^\infty$ — аналог расслоения Хопфа. е) X — расслоение единичных касательных векторов к S^2; $Y = S^2$; $f : X \to Y$ — проекция расслоения. ж) То же самое, где вместо S^2 — сфера с g ручками.