8. КЛЕТКИ ШУБЕРТА.

Задача 1. Рассмотрим в $\mathbb{R}^{n+1}$ базис $e_1, \dots, e_{n+1}$, и обозначим $A_k \subset \mathbb{R}P^n$ множество прямых, лежащих в линейном пространстве $L_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \langle e_1, \dots, e_{k+1} \rangle$, но не лежащих в L_k. а) Докажите, что множество A_k гомеоморфно $\mathbb{R}^k$. б) Докажите, что множества A_k образуют клеточное разбиение пространства $\mathbb{R}P^n$. в) Сформулируйте и докажите аналогичные результаты для $\mathbb{C}P^n$.

Указание (к пункту 1б)**.** Решите задачу сначала при $n = 1$ и $n = 2$, затем при $n = 3$.

Задача 2. Обозначим $G(4,2)$ множество всех двумерных линейных подпространств в $\mathbb{R}^4$. Зафиксируем в $\mathbb{R}^4$ базис $e = (e_1, \dots, e_4)$. Докажите, что следующие подмножества $G(4,2)$ гомеоморфны линейным пространствам $\mathbb{R}^k$, и найдите в каждом случае соответствующее k: а) $\sigma_{2,2}(e)$: плоскости, пересекающие плоскость $\langle e_1, e_2 \rangle$ только в начале координат, и не лежащие в пространстве $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$; б) $\sigma_{2,1}(e)$: плоскости, не лежащие в пространстве $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$, но пересекающие плоскость $\langle e_1, e_2 \rangle$ по прямой, отличной от $\langle e_1 \rangle$; в) $\sigma_2(e)$: плоскости, пересекающие плоскость $\langle e_1, e_2 \rangle$ по прямой $\langle e_1 \rangle$, и не лежащие в пространстве $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$; г) $\sigma_{1,1}(e)$: плоскости, лежащие в пространстве $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ и пересекающие плоскость $\langle e_1, e_2 \rangle$ по прямой, отличной от $\langle e_1 \rangle$; д) $\sigma_1(e)$: плоскости, лежащие в пространстве $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ и пересекающие плоскость $\langle e_1, e_2 \rangle$ по прямой $\langle e_1 \rangle$.

Задача 3. а) Докажите, что подмножества задачи 2 образуют клеточное разбиение $G(4,2)$. б) Пусть индексы λ и μ таковы, что $\dim \sigma_\lambda + \dim \sigma_\mu = 4 (= \dim G(2,4))$. Докажите, что для базисов e и f “общего положения” пересечение $\sigma_\lambda(e) \cap \sigma_\mu(f)$ состоит из конечного числа точек, и найдите это число. в) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для множества $G_+(4,2)$ ориентированных двумерных линейных подпространств в $\mathbb{R}^4$. г) Докажите, что $G_+(4,2)$ гомеоморфно $S^2 \times S^2$. д) В множестве $S^2 \times S^2$ имеется стандартное клеточное разбиение (произведение разбиений S^2 на точку и все остальное). Как расположены клетки этого разбиения относительно клеток, построенных в пункте 3в?

Зафиксируем базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ в $\mathbb{R}^n$. Для произвольного подпространства $V \subset \mathbb{R}^n$ обозначим $a_s = a_s(V) \stackrel{\text{def}}{=} \dim V \cap \langle e_1, \dots, e_s \rangle$.

Задача 4. а) Докажите, что $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n$ и $1 - a_1 \le 2 - a_2 \le \dots \le n - a_n$. б) Назовем индекс s *ведущим*, если $a_s > a_{s-1}$. Докажите, что в подпространстве V существует единственный базис $v_1, \dots, v_k$ такой, что $v_i = e_{m_i} + f_i$, где m_i — i-й по величине ведущий индекс, а $f_i = \sum_t \alpha_t^{(i)} e_t$, где в сумме все индексы t меньше m_i и среди них нет ведущих.

Задача 5. Докажите, что множество $\sigma_{\{}a_1, \dots, a_n\}(e)$ подпространств $V \subset \mathbb{R}^n$ с заданной последовательностью a_s гомеоморфно $\mathbb{R}^k$, и найдите k. Проверьте, что для $\dim V = 1$ и $n = 4, \dim V = 2$ получаются множества из задач 1 и 2.

Задача 6. Для каких последовательностей $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n$ множество $\sigma_{\{}a_1, \dots, a_n\}(e)$ принадлежит замыканию множества $\sigma_{\{}b_1, \dots, b_n\}(e)$?