ПРОГРАММА ЗАЧЕТА

Программа делится на основные вопросы, которые разбирались в лекциях, и супервопросы, которых в лекциях не было. Для супервопросов написано, в какой книге их смотреть. Для сдачи зачета необходимо ответить на один или несколько теоретических вопросов по усмотрению преподавателя либо на один супервопрос по собственному выбору. Кроме того, необходимо решить несколько задач из листков или аналогичных.

Вопрос из программы содержит название или формулировку утверждения, которое нужно уметь доказывать. Предполагается, что необходимые определения и вспомогательные утверждения студент сформулирует самостоятельно.

1. Основные вопросы

1. Линейно связное пространство связно; обратное неверно.
2. Замкнутое подмножество компакта — компакт. Компактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто.
3. Декартово произведение компактов — компакт. Подмножество $\mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.
4. Теорема о накрывающей гомотопии для расслоений (пространство параметров — куб).
5. Существование универсального накрытия.
6. Категория накрытий с точностью до изоморфизма эквивалентна категории подгрупп.
7. Гомотопические группы (включая фундаментальную) гомотопически эквивалентных пространств изоморфны.
8. Отображение надстройки $\Sigma : \pi_n(S^n) \to \pi_{n+1}(S^{n+1})$ — мономорфизм.
9. Степень отображения $\deg : \pi_n(S^n) \to \mathbb{Z}$ корректно определена и не меняется при гомотопиях. $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$.
10. Лемма Фельдбау.
11. Гомотопическая последовательность пары точна. Гомотопическая последовательность расслоения точна.
12. Теорема о клеточной аппроксимации.
13. Вычисление фундаментальной группы по клеточному разбиению.

2. Супервопросы

1. Универсальное накрытие сферы с ручками плоскостью Лобачевского (Прасолов и Тихомиров, “Геометрия”, §5.4, раздел “Теорема Пуанкаре о фундаментальном многоугольнике”).
2. Гомоморфизм надстройки $\Sigma : \pi_k(S^n) \to \pi_{k+1}(S^{n+1})$ — изоморфизм при $k \le 2n-2$ и эпиморфизм при $k = 2n-1$. Стабилизация гомотопических групп сфер (Фукс и Фоменко, “Курс гомотопической топологии”, §10.1).
3. Вычисление π_n клеточного пространства с единственной нульмерной клеткой и без клеток размерностей $1, 2, \dots, n-1$. Любое клеточное пространство X с $\pi_1(X) = \dots = \pi_{n-1}(X) = 0$ гомотопически эквивалентно такому пространству. (Фукс и Фоменко, §§11.1 и 11.3).
4. Произведение Уайтхеда $\pi_n(X) \times \pi_m(X) \to \pi_{n+m-1}(X)$; вычислить его в случае $\pi_2(S^2) \times \pi_2(S^2) \to \pi_3(S^2)$. (Фукс и Фоменко, §10.5)