Топология, 2-й курс. Листок 1. Гомотопические группы. 7 сентября 2011

1. Докажите, что любое непрерывное отображение $S^n \to S^m$, где $n < m$, гомотопно постоянному отображению.

2. Докажите, что $S^p \times S^q / S^p \vee S^q \approx S^{p+q}$.

3. Докажите, что $S^p \times S^q \setminus point \sim S^p \vee S^q \quad (p, q \geq 1)$.

4. Докажите, что любое компактное подмножество CW-комплекса пересекает лишь конечное число открытых клеток.

5. Докажите, что если $Y \subset X$ — стягиваемый подкомплекс, то $X/Y \sim X$.

6. Пусть Y — подкомплекс CW-комплекса X. Докажите, что $X/Y \sim X \cup CY$, где CY — конус над Y.

7. Докажите, что отображение $f_0 : (D^n, \partial D^n, s_0) \to (X, A, a_0)$ гомотопно (в классе отображений троек) постоянному отображению тогда и только тогда, когда существует гомотопия $f_t : (D^n, \partial D^n, s_0) \to (X, A, a_0)$, для которой $f_1(D^n) \subset A$ и $f_t(x)$ не зависит от t для $x \in \partial D^n$, т.е. гомотопия неподвижна на $S^{n-1} = \partial D^n$.

8. Докажите, что гомотопическая последовательность пары

$$\dots \to \pi_n(A) \to \pi_n(X) \to \pi_n(X, A) \to \pi_{n-1}(A) \to \dots$$

точна.

9. Докажите, что $\pi_n(CX, X, x_0) \cong \pi_{n-1}(X, x_0)$ при $n \geq 1$.

10. Пусть S^∞ —множество точек $(x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$, у которых лишь конечное число координат отлично от нуля и $\sum x_i^2 = 1$. Это множество является метрическим пространством, и на нём есть естественная топология. Докажите, что пространство S^∞ стягиваемо.

Указание: докажите, что тождественное отображение гомотопно отображению
$(x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots)$.

11. Пусть A и B — связные CW-комплексы с отмеченными точками a_0 и b_0. Докажите, что $A * B \sim \Sigma(A \wedge B)$, где $A \wedge B = A \times B / A \vee B$ и $A \vee B = (\{a_0\} \times B) \cup (A \times \{b_0\})$.