Топология, 2-й курс. Листок 10. Теория Морса. 9 ноября 2011

1. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и $f : U \to \mathbb{R}$ — гладкая функция. Докажите, что для почти всех линейных функций $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ функция $f+A$ имеет только невырожденные критические точки.

2. Пусть многообразие M^n вложено в $\mathbb{R}^m$. Фиксируем точку $a \in \mathbb{R}^m$ и положим $f(x) = \|x - a\|^2$ для $x \in M^n$.

а) Докажите, что точка $x \in M^n$ является критической точкой функции f тогда и только тогда, когда вектор $\xi = x - a$ ортогонален пространству $T_x M^n$.

б) Докажите, что для почти всех $a \in \mathbb{R}^m$ функция $f(x) = \|x - a\|^2$ является функцией Морса.

Пусть f — гладкая функция на многообразии M^n. Если на M^n задана риманова метрика, то по функции f можно построить *градиентное векторное поле* $\operatorname{grad} f$, которое характеризуется следующим свойством: для любого гладкого векторного поля v на многообразии M^n выполняется равенство $(\operatorname{grad} f,\, v) = v(f)$, где $v(f)$ — производная функции f по направлению векторного поля v.

3. Докажите, что особые точки векторного поля $\operatorname{grad} f$ соответствуют критическим точкам функции f, причём невырожденные особые точки соответствуют невырожденным критическим точкам.

4. Докажите, что для любой римановой метрики индекс невырожденной особой точки x_0 векторного поля $\operatorname{grad} f$ равен $(-1)^i$, где i — индекс критической точки x_0 функции f.

5. Пусть f — функция Морса на замкнутом многообразии M^n. Докажите, что альтернированная сумма $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i c_i$, где c_i — количество критических точек индекса i, не зависит от выбора функции f.

6. Предположим, что на замкнутом многообразии M^n существует функция Морса f, имеющая ровно две невырожденные критические точки. Докажите, что тогда многообразие M^n гомеоморфно S^n.

7. Постройте функцию Морса на n-мерном торе и укажите её критические точки.

8. Постройте функцию Морса на S^n а) с двумя критическими точками; б) с $2n + 2$ критическими точками (по две точки каждого индекса от 0 до n).

9. Постройте функцию Морса: а) на $\mathbb{R}P^n$; б) на $\mathbb{C}P^n$.