Топология, 2-й курс. Листок 2. n-связные пространства. 14 сентября 2011

Про точки $x_1, \ldots, x_k$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ говорят, что они находятся *в общем положении*, если любые $m+1$ из этих точек не лежат в одном $(m-1)$-мерном аффинном подпространстве при $m \leq n$.

1. а) Докажите, что для любого k в пространстве $\mathbb{R}^n$ можно выбрать k точек общего положения.

б) Выберем попарно различные числа $t_1, \ldots, t_k$ и рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ точки $(t_i, t_i^2, t_i^3, \ldots, t_i^n)$, где $i = 1, \ldots, k$. Докажите, что эти точки являются точками общего положения.

2. Вершины двух симплексов, p-мерного и q-мерного, являются точками общего положения в n-мерном пространстве. Каково должно быть n (при данных p и q), чтобы симплексы обязательно не пересекались?

3. Докажите, что n-связный CW-комплекс гомотопически эквивалентен CW-комплексу, у которого есть ровно одна вершина и нет k-мерных клеток, где $1 \leq k \leq n$.

4. Докажите, что CW-комплекс X с одной вершиной, не имеющий k-мерных клеток, где $1 \leq k \leq n$, n-связен.

5. Докажите, что n-мерный n-связный CW-комплекс стягиваем.

В задачах 6–8 предполагается, что X — n-связный CW-комплекс, Y — m-связный CW-комплекс (оба комплекса конечномерные).

6. Докажите, что ΣX — $(n+1)$-связный комплекс.

7. Докажите, что $X \wedge Y$ — $(n+m+1)$-связный комплекс;

8. Докажите, что $X * Y$ — $(n+m+2)$-связный комплекс.

Для топологического пространства X можно определить его n-ю *симметрическую степень* $\mathrm{SP}^n(X)$ следующим образом. На пространстве $X^n = X \times \cdots \times X$ действует группа S_n: $\sigma(x_1, \ldots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$. Фактор пространства X^n по этому действию — это и есть $\mathrm{SP}^n(X)$.

9. Докажите, что $\mathrm{SP}^n(\mathbb{C}P^1) \approx \mathbb{C}P^n$.

10. Докажите, что $\mathrm{SP}^n(\mathbb{R}P^2) \approx \mathbb{R}P^{2n}$.