Топология, 2-й курс. Листок 3. Расслоения. 21 сентября 2011

1. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{C}^2$ с координатами z и w сферу S^3, заданную уравнением $|z|^2 + |w|^2 = 1$. На S^3 действует группа $S^1 = \{e^{i\alpha}\}$ (обе координаты z и w умножаются на $e^{i\alpha}$). Факторпространство по этому действию гомеоморфно проективному пространству $\mathbb{C}P^1$ с однородными координатами $(z : w)$. Докажите, что проекция $p : S^3 \to S^3/S^1 \approx \mathbb{C}P^1$ является локально тривиальным расслоением (*расслоение Хопфа*).

2. Представим S^3 как $\mathbb{R}^3 \bigcup \infty$. а) Нарисуйте в $\mathbb{R}^3$ прообразы двух точек S^2 при отображении p. б) Нарисуйте прообразы сразу нескольких точек (в качестве одного из прообразов удобно использовать $\mathbb{R}^2 \bigcup \infty$).

3. Пусть $p : S^3 \to \mathbb{C}P^1$ — расслоение Хопфа. Докажите, что $D^4 \bigcup_p \mathbb{C}P^1 = \mathbb{C}P^2$ (здесь подразумевается, что $S^3 = \partial D^4$).

4. Докажите, что не существует ретракции $r : \mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}P^1$. (Здесь подразумевается, что $\mathbb{C}P^1$ вложено в $\mathbb{C}P^2$ естественным образом.)

5. Постройте многомерное расслоение Хопфа $p : S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$.

6. Постройте кватернионное расслоение Хопфа.

7. а) Разобьём S^2 на две полусферы. Докажите, что их прообразы при расслоении Хопфа — два полнотория $S^1 \times D^2$.

б) Исходя из этого, опишите, как склеить сферу S^3 из двух полноторий.

8. Склейте сферу S^{p+q+1} из $S^p \times D^{q+1}$ и $D^{p+1} \times S^q$.

* * *

В задачах 9–14 постройте указанные локально тривиальные расслоения и укажите их слои.

9. $\mathrm{SO}(n) \to S^{n-1}$.

10. $\mathrm{U}(n) \to S^{2n-1}$.

11. $\mathrm{U}(n) \to S^1$.

Пусть $V_{k,n}$ — *многообразие Штифеля* k-мерных реперов в $\mathbb{R}^n$, $G_{k,n}$ — *многообразие Грассмана* k-мерных подпространств в $\mathbb{R}^n$.

12. $\mathrm{O}(n) \to V_{k,n}$.

13. $V_{k+1,n} \to V_{k,n}$

14. $V_{k,n} \to G_{k,n}$.